

ORSAY

n° d'ordre : 4048

LAL 96-01

Janvier 1996

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THÈSE

*présentée
pour obtenir*

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par
François BONDU

sujet :

**Étude du bruit thermique
et stabilisation en fréquence du laser
du détecteur interférométrique
d'ondes gravitationnelles VIRGO**

Soutenue le 10 Janvier 1996 devant la Commission d'examen

MM.	J.	LEFRANÇOIS	Président
	F.	BIRABEN	
	S.	BONAZZOLA	
	M.	DAVIER	
	Ph.	TOURRENC	
	J.-Y.	VINET	

Abstract

For an interferometric gravitational wave detector such as Virgo, high sensitivity is crucial for precise identification of astrophysical sources. Such an antenna detects a gravitational wave as a phase variation of a laser beam. The precision of such a measurement may be limited by the noise of the cavity length, due to thermal vibrations, or by the input laser frequency noise.

My contribution to the study of the mirror substrate internal mode noise, was the development of a numerical code, which is able to compute resonant frequencies, mode effective masses, surface deformation and its coupling with the laser beam. This allows us to select mirror substrate sizes. The sensitivity is then slightly worse than that found from a rough estimation, if the acoustic losses are frequency independent and equal to those measured at resonance. The sensitivity can be improved by reducing the losses or by choosing a better material. We have also carried out experiments to facilitate choosing suspension wires. I suggest an experiment of direct measurement of thermal noise, for verifying the sensitivity.

The interferometer configuration renders the laser frequency noise negligible if the frequency is stabilized to an optical cavity. This will be done in two stages; the first is to lock the laser to a short rigid cavity, and the second to the three kilometer arms of the interferometer. The first stage has been built. I have checked that its performance meets the specifications. The measured frequency stability is exceptional.

Key Words :

VIRGO

Gravitational waves

Thermal noise

Frequency stabilization

Cylinders vibrations

Sound dissipation in solids

Remerciements

JE REMERCIE Michel DAVIER et Jacques LEFRANÇOIS de m'avoir accueilli au Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, à Orsay. Merci également à Alain BRILLET pour son accueil au sein de l'équipe Virgo. Merci aussi pour m'avoir invité à participer à l'expérience de stabilisation en fréquence du laser, et pour le temps partagé sur l'expérience.

Je remercie Jean-Yves VINET de m'avoir proposé un sujet de thèse au sein de l'expérience Virgo. Tout en me laissant, je crois, libre de la manière de faire, ses conseils ont toujours été pertinents : en peu de mots des pistes de travail et de nouvelles manières de faire sont ouvertes. Il m'a invité à ne pas en rester à l'étude du bruit thermique, mais aussi à comprendre le fonctionnement du détecteur, à en saisir les problèmes d'optique.

Merci à Nary MAN et à tout le groupe optique Virgo d'Orsay. J'ai apprécié la manière de travailler ensemble, pour construire le banc laser et le banc d'entrée de l'interféromètre. J'ai toujours eu beaucoup de plaisir et de profit à discuter avec Henrich HEITMANN, Frédéric CLEVA, Laoucine LATRACH, Matthiew TAUBMAN, Manoel DIALINAS, Jean CACHENAUT, Jean-Pierre COULON, Ronic CHICHE, Jean-Claude LUCENAY, Thierry REDON, Philippe BINDZI.

Merci à Manh PHAM-TU avec qui nous avons formé la petite équipe « bruit thermique » d'Orsay. Il m'a appris, entre autres, sa rigueur dans l'expérimentation et la prise de résultats. Merci aussi pour ses relectures attentives des divers notes et papiers.

Merci à l'équipe Virgo d'Orsay : Patrice HELLO pour son soutien, ses explications sur le fonctionnement de l'interféromètre, Fabien CAVALIER, François LEDIBERDER, Alain MARRAUD, Michel DEHAMME, Matteo BARSUGLIA, et puis Gia Hien NGUYEN et Éric TOURNIÉ qui m'ont courageusement supporté. Merci aussi à Emmanuelle ROUILLÈRE, Maryse JÉGOU et Bérangère PETITJEAN.

Merci à tous ceux du laboratoire qui m'ont aidé, Stephan SIMION, Laurent DUFLLOT, Laurent SERIN dans l'utilisation de PAW, Christian BECAM et René BILHAUT au service informatique dans l'utilisation des ressources informatiques.

Merci enfin aux membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail ; merci à Jacques LEFRANÇOIS d'avoir accepté la présidence du jury, merci à François BIRABEN et Silvano BONAZZOLA d'avoir accepté la charge de rapporteur.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	xi
I Virgo et la détection des ondes de gravitation	1
1 Les ondes de gravitation	3
1.1 Les ondes de gravitation et la relativité générale	3
1.2 Sources	6
1.2.1 Sources terrestres	6
1.2.2 Sources astrophysiques	7
1.3 Observer l'univers avec les ondes de gravitation	11
1.4 Détection : dispositifs expérimentaux	12
1.4.1 Présentation	12
1.4.2 Barres résonnantes	13
1.4.3 Détection interférométrique	14
2 Détection interférométrique	17
2.1 Les miroirs sont des masses libres	17
2.2 Le transducteur : une cavité optique résonnante	19
2.2.1 Les cavités résonnantes Fabry Perot	19
2.2.2 Mesurer une phase pour détecter une onde gravitationnelle	24
2.2.3 Bruit de photons	29
2.3 Interférométrie	29

2.3.1	Bruit de longueur des cavités	30
2.3.2	Bruit de fréquence du laser	30
2.3.3	Interféromètre de Michelson	31
2.3.4	Recyclage de la lumière	33
2.3.5	Bruit de photons dans Virgo	37
2.4	Bruits et sensibilité	38
2.4.1	Sources de bruit	38
2.4.2	Analyse du signal	39
2.5	Conclusion	42
II	Modèle de bruit thermique	43
1	Le bruit thermique: généralités	45
1.1	Enjeux de l'étude pour Virgo	45
1.2	L'oscillateur harmonique	46
1.2.1	Paramètres	46
1.2.2	Amortissement visqueux et amortissement interne	48
1.3	Le théorème fluctuation-dissipation	49
1.3.1	Énoncé	49
1.3.2	Cas de l'oscillateur harmonique	49
1.4	Vibrations acoustiques dans les solides	50
1.4.1	Résonances dans un réseau cristallin	51
1.4.2	Modèle continu unidimensionnel	52
1.4.3	Acoustique des milieux continus	53
1.5	Dissipations des ondes acoustiques dans les solides	54
1.5.1	Une modélisation des dissipations: l'anélasticité	54
1.5.2	Dissipations thermoélastiques	56
1.5.3	Dissipations par interaction phonon-phonon	58
1.5.4	Dissipations par interaction phonon-électron	58
1.5.5	Dissipations par propagation de dislocations	58
1.5.6	Dissipations par pertes de recul	59

1.5.7	Pertes par adaptation d'impédance	60
1.5.8	Dissipations par amortissement dans l'air	61
1.5.9	Autres sources de pertes	61
1.5.10	Dissipations : conclusion	63
1.6	Première évaluation du bruit thermique	63
1.6.1	Bruit thermique pendulaire	64
1.6.2	Bruit thermique des miroirs	65
1.6.3	Bruit thermique dans l'interféromètre Virgo	66
1.7	Mesure de faibles pertes	66
1.8	Conclusion	67
2	Bruit thermique des fils de suspension	69
2.1	Bruit thermique pendulaire	69
2.2	Bruit thermique des modes violon	70
2.3	Modèle à constantes réparties	73
2.3.1	Équations de propagation	74
2.3.2	Analogie avec des lignes électriques	75
2.3.3	Résolution des équations de propagation	75
2.3.4	Fréquences de résonance	77
2.3.5	Pertes acoustiques	78
2.3.6	Bruit thermique	79
2.4	Choix du matériau	79
2.5	Mesures de matériaux	81
2.5.1	Dispositif expérimental	81
2.5.2	Influence des espaceurs	86
2.5.3	Influence de la tension du fil	86
2.5.4	Comparaison aux pertes thermoélastiques	88
2.5.5	Pertes internes pour différents matériaux	88
2.5.6	Choix du matériau	91
2.6	Conclusion	94

3	Bruit thermique des substrats des miroirs	95
3.1	Fréquences de résonance des miroirs	95
3.1.1	Calcul des fréquences	95
3.1.2	Mesures des fréquences de résonance	99
3.2	Calcul des masses équivalentes	101
3.2.1	Déplacement équivalent pour un faisceau gaussien	101
3.2.2	Calcul de l'énergie acoustique stockée	101
3.3	Modèle de calcul du bruit thermique	102
3.3.1	Procédure	102
3.3.2	Validation des résultats	102
3.3.3	Résultats	103
3.4	Des substrats en saphir?	110
3.5	Mesures de facteurs de qualité	111
3.6	Conclusion	114
4	Mesure directe du bruit thermique	117
4.1	Motivation	117
4.2	Sensibilité à atteindre	117
4.3	Dispositif expérimental	119
4.4	Isolation sismique	120
4.5	Paramètres optiques	120
4.5.1	Transmission ou réflexion	120
4.5.2	Longueur de la cavité	123
4.5.3	Propriétés des miroirs	125
4.5.4	Propriétés du faisceau	125
4.6	Perspectives	126
III	Stabilisation en fréquence du laser	127
1	Stabilisation de fréquence	129
1.1	Intérêt de la stabilisation en fréquence	129

1.1.1	Intérêt pour détecter des ondes gravitationnelles	129
1.1.2	Intérêt pour une mesure directe de bruit thermique	129
1.1.3	Intérêt pour la métrologie des fréquences, des temps et des longueurs	130
1.2	Principe	130
1.2.1	Asservissement sur la longueur d'une cavité	130
1.2.2	La technique Pound Drever	132
1.3	La stabilisation de fréquence dans Virgo	134
1.3.1	Stabilité de fréquence requise	134
1.3.2	Asservissement en deux étages	135
1.3.3	Autre schéma d'asservissement	137
1.3.4	Bruits	139
1.4	Conclusion	141
2	Expérience de stabilisation en fréquence	143
2.1	Objectifs	143
2.2	Principes de l'expérience	143
2.3	Implantation	144
2.3.1	Les cavités Fabry Perot	144
2.3.2	Implantation optique	148
2.3.3	Implantation mécanique	149
2.4	Résultats et interprétation	151
2.4.1	Calibration	151
2.4.2	Bruit de fréquence	152
2.4.3	Analyse	152
2.4.4	Dérives à long terme	155
2.4.5	Stabilité : variance d'Allan	156
2.4.6	Automatisation de l'accrochage	158
2.5	Conclusion	160
A	Optique gaussienne	165
A.1	Approximation paraxiale	165

A.2	Modes TEM _{mn}	166
A.3	Faisceau gaussien	166
B	Asservissements : principes	167
B.1	Présentation	167
B.2	Gain unité	168
B.3	Stabilité	168
	Glossaire des principaux symboles utilisés	175

Introduction

L'ESPACE-TEMPS dans lequel nous vivons n'est pas euclidien ; sa structure est plus complexe, et sa géométrie peut localement être courbée. Des variations temporelles de cette courbure pourront, pour la première fois, être directement mises en évidence dans les prochaines années.

La perspective de détection de ces ondes de gravitation suscite de nombreux travaux, tant de la part des astrophysiciens (étude des sources, prédiction de la forme et de l'amplitude des ondes) que de la part des expérimentateurs qui construisent les détecteurs. Plusieurs détecteurs interférométriques sont en cours de construction, parmi lesquels celui du projet franco-italien Virgo. Cette thèse trouve place dans ce dernier.

Un détecteur interférométrique est un transducteur qui permet la conversion d'une onde gravitationnelle en une phase de faisceau laser, par mesure de la position de masses-test formant une cavité optique résonnante (première partie de cette thèse). La sensibilité est limitée par le bruit de mesure (bruit de photons), le bruit de longueur des cavités et le bruit de fréquence du faisceau incident. Le bruit de longueur des cavités est produit principalement par le bruit thermique des masses-test et de leurs suspensions (deuxième partie). Le bruit de fréquence du laser peut être rendu négligeable par une configuration adéquate (interféromètre de Michelson avec cavités Fabry Perot) et par des asservissements appropriés (troisième partie). Améliorer la sensibilité augmentera le nombre de signaux détectables et rendra l'analyse et l'interprétation de ces signaux plus profitables.

Le bruit thermique s'évalue en modélisant un solide par une série de résonateurs. Trois paramètres sont alors à déterminer : la masse, la fréquence propre et l'angle de pertes des ondes acoustiques. Pour calculer les masses équivalentes des modes propres des masses-test nous avons développé une méthode basée sur le calcul des fréquences propres d'un cylindre, mise au point par J.R. Hutchinson. L'expérience ne permet d'accéder à l'angle de pertes qu'aux fréquences de résonance. L'amplitude du bruit de position dû aux vibrations internes des masses-test se calcule alors avec le théorème fluctuation-dissipation. Les résultats nous permettent d'optimiser la taille des masses-test ainsi qu'une évaluation indirecte de la limitation de la sensibilité de l'interféromètre. Nous présentons une procédure d'évaluation du bruit thermique des suspensions par un modèle à constantes réparties. L'angle de pertes, là aussi, est une donnée de l'expérience. Pour améliorer la sensibilité, les efforts doivent se porter sur des matériaux ayant de meilleures caractéristiques mécaniques et des angles de pertes plus faibles. Cela nous amène à proposer l'utilisation du saphir pour les masses-test.

L'angle de pertes a un rôle crucial ; pour mesurer et améliorer ce dernier, nous étudions la faisabilité d'une expérience de mesure directe de bruit thermique, ayant une sensibilité de phase identique à celle de Virgo.

Une mesure fine de phase nécessite un laser ayant une grande stabilité de fréquence. L'asservissement de la fréquence du faisceau laser sur la longueur d'une cavité optique permet cette stabilité. La première étape consiste en la conception de l'asservissement : gains, fréquences de gain unité des deux étages successifs ; elle utilise la propriété de symétrie de l'interféromètre et les propriétés de filtrage des cavités optiques en amont des cavités Fabry Perot de 3 km. La deuxième étape est la réalisation effective du premier étage d'asservissement de la fréquence sur une cavité courte et la vérification que les spécifications sont bien remplies.

Première partie

Virgo et la détection des ondes de gravitation

Chapitre 1

Les ondes de gravitation

Les ondes de gravitation, prédites par la théorie de la relativité générale et d'autres théories concurrentes, sont des déformations locales de l'espace-temps qui se propagent. Mais le coefficient de couplage de la matière avec ce rayonnement étant extrêmement faible, les sources détectables ne peuvent être que des objets astrophysiques particulièrement énergétiques. Les expériences de détection interférométrique (telle que Virgo) dont il est question dans cette thèse veulent les mettre directement en évidence. La preuve définitive de leur existence est loin d'être le seul intérêt : la nouvelle fenêtre ainsi ouverte sur l'univers peut nous permettre de mieux connaître sa composition, son histoire, ses propriétés ; leur analyse peut aussi aider à déterminer l'équation d'état de la matière nucléaire, les corrections aux ordres post-newtonniens de la relativité générale... La réalisation de détecteurs sensibles oblige à des avancées technologiques, mais celle-ci semble être possible.

1.1 Les ondes de gravitation et la relativité générale

Les aspects statique et dynamique du champ électromagnétique sont bien connus. Les équations de Maxwell décrivent la propagation des variations de champ électrique et magnétique, qui se fait à la vitesse de la lumière dans le vide. Ces variations de champ sont dues à des déplacements de charges. Le déplacement de masses produit de même des variations de champ gravitationnel newtonnien ; à moins que celui-ci ne se propage instantanément, on conçoit bien que des ondes doivent porter ces variations. C'est ce que permet d'établir l'équation d'Einstein dans le cadre de la relativité générale.

La relativité générale est une théorie établie par Einstein dès 1916 qui montre comment la structure de l'espace est liée à son contenu. La gravitation n'est plus décrite comme une force, mais comme une propriété géométrique de l'espace-temps. Ce dernier n'est plus euclidien, mais est doté d'une structure de variété riemannienne, déterminée par son tenseur métrique. On choisit donc un système de coordonnées muni d'une métrique g_{ij} [1] ; la mesure

d'un intervalle infinitésimal d'espace-temps ds se fait alors avec

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (1.1)$$

où x^i (indices latins) sont les coordonnées d'un vecteur, x^0 la coordonnée temporelle et x^μ (indices grecs) les coordonnées spatiales. On définit les symboles de Christoffel par :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) \quad (1.2)$$

$$\Gamma_{ij}^k = g^{lk} \Gamma_{ijl} \quad , \quad (1.3)$$

le tenseur de courbure (ou tenseur de Riemann) par :

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^m \quad , \quad (1.4)$$

et le tenseur de Ricci par :

$$R_{ij} = R_{ikj}^k \quad . \quad (1.5)$$

La courbure scalaire est enfin $R = g^{ij} R_{ij}$.

On dispose aussi d'un tenseur décrivant la distribution de la matière dans l'espace, le tenseur énergie-impulsion T_{ij} . Par exemple, pour un fluide parfait,

$$T_{ij} = (\rho + p/c^2)u_i u_j + p g_{ij} \quad (1.6)$$

où ρ est la densité de matière dans le référentiel au repos, p la pression et u_i est la quadri-vitesse de l'observateur.

L'équation d'Einstein relie cette distribution au tenseur de courbure :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}(R - \Lambda) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (1.7)$$

où Λ est la constante cosmologique, G est la constante de gravitation, c la vitesse de la lumière.

Cet ensemble de 10 équations n'est pas linéaire. Si on linéarise autour d'une solution connue, il est possible de trouver une solution propagative. Posons $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, où η_{ij} est la métrique de Minckowski de l'espace-temps plat

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

et h_{ij} une perturbation à cette solution ($|h_{ij}| \ll 1$). $h_{ij}(t)$ est un nombre sans dimension. On peut montrer alors que cette perturbation se propage à la vitesse de la lumière à l'extérieur des sources :

$$\square h_{ij} = 0 \quad (1.9)$$

On a choisi une jauge transverse sans trace (TT) $h_i^i = 0$. Une onde se propageant le long de l'axe des z s'écrit :

$$h_{ij} = (h_+)_{ij} f_1(t - z/c) + (h_\times)_{ij} f_2(t - z/c) \quad (1.10)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions quelconques, et h_+ et h_\times sont deux polarisations indépendantes appelées ondes « plus » et « croix ». Celles-ci sont définies par :

$$h_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Une solution générale est une superposition de telles ondes planes. Avec la jauge choisie, lorsqu'une onde gravitationnelle passe, les coordonnées d'une particule-test au repos ne changent pas. Une onde ne fait pas changer de place une particule, car le système de coordonnées est en co-mouvement. Par contre, la distance spatiale entre deux particules au repos varie :

$$\delta l = \int \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dy^\beta} \quad (1.12)$$

L'effet d'une onde plane sinusoïdale se propageant le long de l'axe des z est illustré en figure 1.1.

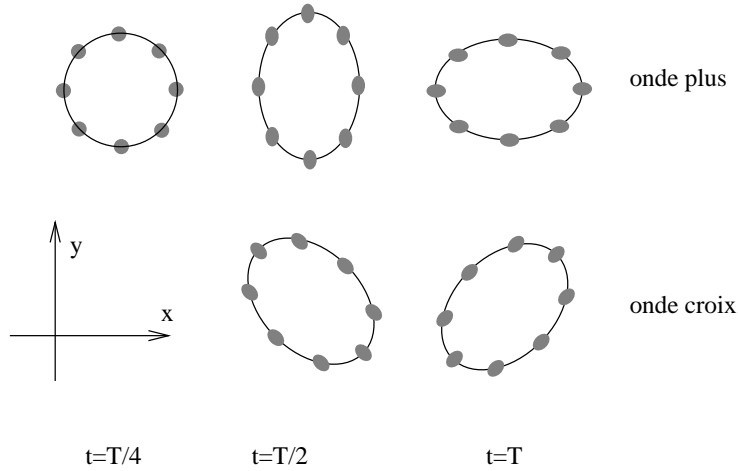


FIG. 1.1 – Effet d'une onde gravitationnelle sinusoïdale de période T sur un anneau de particules-test

1.2 Sources

La solution des équations linéarisées d'Einstein avec source se présente de façon similaire à celle qui donne le potentiel-vecteur en électromagnétisme [1] :

$$h_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \int_{\text{source}} \frac{4\bar{T}_{ij}(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.13)$$

où $\bar{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}T_l^l$ et \mathbf{x} est un vecteur portant les coordonnées de l'objet observé dans le repère de l'observateur.

Deux points apparaissent immédiatement à la lecture de l'équation 1.13. Le premier est que des densités faibles, à des vitesses faibles (les ordres de grandeur restent à préciser), vont donner des ondes de trop faible amplitude pour pouvoir être mesurées, en raison du facteur G/c^4 . Les détecteurs interférométriques, les plus sensibles, pourront mesurer des ondes ayant une amplitude de l'ordre de 10^{-21} (l'amplitude exacte détectable dépend de la forme de l'onde). Le deuxième point est la dépendance en $1/R$ de l'onde, R étant la distance entre l'observateur et la source. Ceci n'est pas particulier aux ondes gravitationnelles ; ce qui est remarquable, c'est que les détecteurs d'ondes gravitationnelles que nous verrons par la suite sont sensibles au champ h_{ij} , et non pas à l'intensité (qui décroît en $1/R^2$) comme c'est le cas pour les antennes sensibles aux ondes électromagnétiques. Ceci donne une conséquence immédiate pour un détecteur d'ondes gravitationnelles limité par un bruit de fond. Un gain d'un facteur 2 sur le bruit de fond permet de voir deux fois plus loin en distance si on travaille à un rapport signal sur bruit donné. Le volume d'univers observé est donc accru d'un facteur 8 : un petit gain sur le niveau de bruit de fond change beaucoup le nombre d'événements observés.

1.2.1 Sources terrestres

L'amplitude d'une onde gravitationnelle émise par un objet est à l'approximation newtonnienne :

$$h_{\alpha\beta} = \frac{2G}{Rc^4} \ddot{Q}_{\alpha\beta}(t - R/c) \quad (1.14)$$

où $Q_{\alpha\beta} = \sum m (z^\alpha z^\beta - \delta^{\alpha\beta} \bar{z}^2/3)$ est le moment quadrupolaire de l'objet et R est la distance entre l'observateur et l'objet.

Soit un système de deux masses m_1 et m_2 , distantes de r , en rotation autour de leur centre de masse, dans le plan (Oxy). Définissons la masse réduite du système μ

$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \quad (1.15)$$

La pulsation de rotation est ω . Le moment quadropolaire vaut

$$Q_{11} = \mu r^2 \left(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} \right) \quad (1.16)$$

$$Q_{22} = \mu r^2 \left(\sin^2(\omega t) - \frac{1}{3} \right) \quad (1.17)$$

$$Q_{33} = -\frac{1}{3}\mu r^2 \quad (1.18)$$

$$Q_{12} = \frac{1}{2}\mu r^2 \sin(2\omega t) \quad (1.19)$$

$$Q_{21} = Q_{12} \quad (1.20)$$

Les autres coefficients sont nuls. Il est facile de vérifier que les ondes gravitationnelles émises sont alors

$$h_+ = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 i) h_0 \cos(2\omega t) \quad (1.21)$$

$$h_\times = \cos i h_0 \sin(2\omega t) \quad (1.22)$$

où i est l'angle entre l'axe de rotation du système et l'axe défini par le système et l'observateur. h_0 vaut

$$h_0 = \frac{4G}{Rc^4} \mu r^2 \omega^2 \quad (1.23)$$

Par exemple, en laboratoire, avec deux masses $m = 1$ kg, distantes de $r = 1$ m, tournant autour de leur barycentre situé à $R = 1$ m, à la pulsation $\omega = 1$ rad/s, avec un angle d'incidence $i = 0$, avec $G = 6,673.10^{-11}$ m³.kg⁻¹.s⁻² et $c = 2,998.10^8$ m.s⁻¹,

$$h_0 = 1,6.10^{-45} \quad (1.24)$$

On voit qu'un système mécanique à l'échelle du laboratoire ne peut pas produire d'ondes gravitationnelles détectables, même en augmentant les masses ou la vitesse de rotation : trop d'ordres de grandeurs séparent h_0 du seuil de détection (de l'ordre de 10^{-21}).

1.2.2 Sources astrophysiques

Seuls les signaux provenant d'événements violents dans l'univers sont susceptibles de donner des ondes d'amplitude appréciable. Pour que la quantité $h(t)$ soit détectable (au sens des détecteurs actuels ou de leurs extensions), il faut des masses considérables en mouvement (de l'ordre d'une masse solaire) et des vitesses relativistes (de l'ordre de la vitesse de la lumière).

Un premier type de source est constitué par les étoiles ayant achevé leur combustion et s'effondrant en étoiles à neutrons ou trous noirs (supernovæ). La pression électronique

qui empêchait l'effondrement de la matière sur elle-même ne s'exerce plus, et la grande vitesse acquise par les particules « tombant » sur le cœur laisse espérer des amplitudes acceptables. Le signal reçu se présente sous forme de brève impulsion ; son amplitude et sa phase dépendent beaucoup du modèle choisi (équation d'état, onde de choc, symétrie du problème). L'amplitude est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-20}$ pour un signal à 10 kpc [2], soit en densité spectrale de l'ordre de $10^{-22} / \sqrt{\text{Hz}}$ à 100 Hz (le rapport entre l'amplitude ou la valeur efficace et la densité spectrale dépend de la forme du signal). Un avantage de ces sources est que leur statistique est relativement bien connue : de l'ordre de 3 par siècle dans la galaxie. Pour obtenir une statistique intéressante sur ces événements, il faudrait observer une grande population d'étoiles, par exemple jusqu'à l'amas de galaxies voisin Virgo.

Un autre type de source, fournissant des signaux quasi-périodiques, est constitué par les coalescences de binaires, chacun des objets étant une étoile, une étoile à neutron ou un trou noir. En effet, lorsque deux objets de masse m_1 et m_2 orbitent l'un autour de l'autre, l'énergie émise sous forme de rayonnement gravitationnel provoque une diminution de la période P de rotation et une diminution du rayon de rotation. Aux derniers instants, les vitesses deviennent particulièrement élevées, et donc l'amplitude de l'onde gravitationnelle devient mesurable. L'amplitude et la forme d'onde sont prédictibles précisément : elles sont calculables au premier ordre en utilisant la formule du quadrupôle, et aux ordres supérieurs en utilisant le formalisme post-newtonien [3]. Par exemple, au premier ordre, on a une formule du type (1.23) où le paramètre r peut être éliminé à l'aide de la troisième loi de Képler ($r^3 = Gm/\omega^2$), et on a alors :

$$h_+ = 2(1 + \cos^2 i) \frac{(G\mathcal{M})^{5/3}}{Rc^4} \omega^{2/3} \cos(2\phi) \quad (1.25)$$

$$h_\times = 4 \cos i \frac{(G\mathcal{M})^{5/3}}{Rc^4} \omega^{2/3} \sin(2\phi) \quad (1.26)$$

où $\dot{\phi} = \omega$, la masse caractéristique de l'événement \mathcal{M} étant définie par

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} m_T^{2/5} \quad (1.27)$$

où $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$ est la masse réduite et $m_T = m_1 + m_2$ la masse totale. La pulsation de rotation de la binaire $\omega(t)$ est définie par

$$\omega(t) = \frac{1}{8} \left(\frac{(G\mathcal{M})^{5/3}}{5c^5} \right)^{-3/8} (t_c - t)^{-3/8} \quad (1.28)$$

t_c est l'instant de la coalescence. Si on considère par exemple la coalescence de deux étoiles à neutrons de $1,4 M_\odot$ ($M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg) à 1 Mpc (1 pc = $3 \cdot 10^{16}$ m), avec une incidence $i = 0$, on obtient une amplitude du signal à la fréquence f ($\omega = \pi f$)

$$h_0 = 3,56 \cdot 10^{-21} \left(\frac{R}{1 \text{ Mpc}} \right)^{-1} \left(\frac{\mathcal{M}}{1,4 \times 2^{-1/5} M_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{f}{100 \text{ Hz}} \right)^{2/3} \quad (1.29)$$

Un signal de coalescence a la forme indiquée en figure 1.2

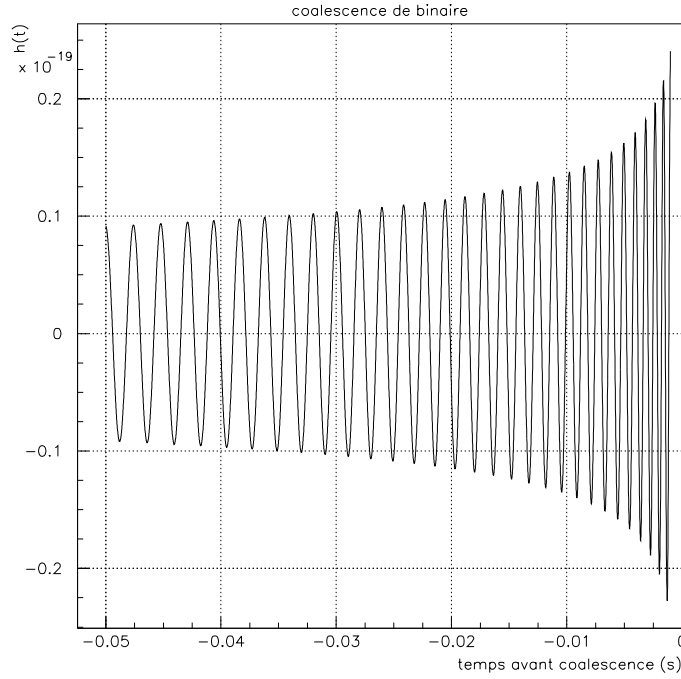


FIG. 1.2 – *Signal de coalescence de deux étoiles de $1,4 M_{\odot}$, à 1 Mpc*

L'amplitude de l'onde devient importante quelques secondes avant la fusion des deux objets, comme le montre la figure 1.3.

Pour avoir assez d'événements [4], il faut pouvoir explorer le ciel jusqu'à plusieurs centaines de Mpc : le nombre de coalescences d'étoiles à neutrons est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-6}$ par an dans la galaxie, et par extrapolation, une par an dans un rayon de 600 Mpc. Si, comme on le soupçonne [5], les sursauts gamma observés dans les détecteurs de neutrinos sont dûs à la coalescence d'étoiles à neutrons, le taux pourrait même être de l'ordre de la centaine de signaux par an. Si un rapport signal à bruit intéressant peut être obtenu, on peut observer jusqu'à 16 000 cycles, et les effets post-newtonniens sur la phase sont sensibles. Un signal peut alors permettre de reconstruire toutes les grandeurs du système : masses individuelles des partenaires et distance absolue de la binaire.

Les sources événementielles dans le temps ne sont pas les seules possibles. Des sources continues pourraient être également mises en évidence. Cela peut être par exemple le cas de pulsars en rotation rapide ; l'amplitude est donnée par

$$h_0 = 4 \cdot 10^{-24} \left(\frac{P}{1 \text{ ms}} \right)^{-2} \left(\frac{R}{1 \text{ kpc}} \right)^{-1} \left(\frac{I}{10^{38} \text{ kg.m}^2} \right) \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right) \quad (1.30)$$

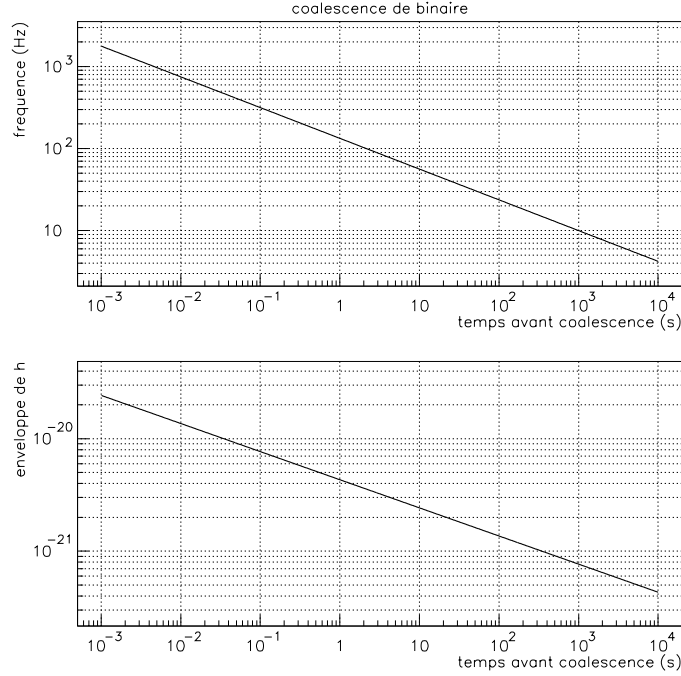


FIG. 1.3 – Amplitude de l'enveloppe et fréquence du signal en fonction du temps avant la coalescence de deux étoiles de $1,4 M_{\odot}$ à 1 Mpc

où P est la période du pulsar, R sa distance, I son moment d'inertie, ϵ un facteur d'asymétrie. Par exemple pour quatre pulsars connus, en remplaçant P et R par les valeurs mesurées, en estimant ϵ à 10^{-6} et I à 10^{38} kg.m^2 , on obtient [6]

pulsar	période (ms)	distance (kpc)	amplitude h_0	ϵ_{max}
Pulsar du Crabe	33	2	$1,9 \cdot 10^{-27}$	$7,6 \cdot 10^{-4}$
Pulsar Vela	89	0,5	$1,1 \cdot 10^{-27}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$
PSR 1957+20	1,61	1,53	$1,1 \cdot 10^{-24}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$
PSR 0437-47	5,76	0,14	$9,1 \cdot 10^{-25}$	$2,9 \cdot 10^{-8}$

Une amplitude de 10^{-27} pourrait être détectable en intégrant le signal sur une année.

Une valeur maximale de ϵ peut être estimée en mesurant la variation de période et en supposant que toute l'énergie est perdue sous forme d'onde gravitationnelle; cette hypothèse est peu réaliste, l'énergie étant probablement émise sous forme d'ondes électromagnétiques. La valeur maximale possible de ϵ avec cette hypothèse est indiquée en dernière colonne du tableau. Les amplitudes h_0 paraissant dans le tableau sont des limites supérieures, la valeur de ϵ pouvant être plus faible que 10^{-6} .

Un bruit continu de rayonnement gravitationnel, datant de la période d'inflation ou émis par des cordes cosmiques, n'est pas à exclure. Un tel fond pourrait se détecter par mesure de corrélation entre différents détecteurs.

1.3 Observer l'univers avec les ondes de gravitation

La perspective de détection d'ondes de gravitation suscite de nombreuses recherches en astrophysique. La détection permettra de valider les modèles, de préciser les statistiques des phénomènes.

Les statistiques données actuellement font de nombreuses hypothèses sur la constitution des galaxies, sur leur évolution dans le temps. La détection permettra donc de mieux connaître ces dernières.

En phase finale de coalescence (les dernières millisecondes), des incertitudes subsistent sur la forme du signal. En effet, les vitesses deviennent alors relativistes, et le calcul de la forme d'onde devient très approché, même avec un formalisme post-newtonien. De plus, les effets de marée déforment chacun des objets (cette déformation dépend de l'équation d'état de la matière nucléaire utilisée [7]). La détection d'un tel signal permettra donc de préciser ces paramètres.

Le signal émis par un pulsar peut également être modulé par la matière en accrétion autour de celui-ci : l'observation de cette modulation permet de mieux connaître cette accrétion. Celle-ci contribue également à augmenter l'asymétrie et donc l'amplitude du rayonnement gravitationnel émis [8].

Un signal de coalescence ayant un bon rapport signal à bruit permet la détermination des ordres post-newtoniens, et ensuite le calcul de la distance absolue de la binaire. Si cette binaire peut être localisée par ailleurs, la constante de Hubble H_0 peut alors être déterminée pour des objets éloignés [9], et la constante de Hubble connue avec précision. Une mesure précise des distances ne serait pas un mince apport à l'astrophysique !

Le signal quasi-périodique de coalescence, si le rapport signal à bruit est suffisamment élevé, permet de déterminer les masses des objets spiralant l'un autour de l'autre. Cette pesée pourra fournir la preuve définitive de l'existence de trous noirs.

Lors d'une coalescence formant un trou noir, le mode de résonance normal du trou noir pourrait être observé [7, 10]. L'observation des ondes émises par la collision de deux trous noirs de Kerr en orbite serait une confirmation éclatante de la validité de la théorie de la relativité générale en champ fort.

Aucune onde gravitationnelle n'est émise par un système à symétrie sphérique parfaite, puisque le moment quadrupolaire correspondant est nul (effondrement parfaitement symétrique de supernova ou d'étoile à neutrons). Par contre, si un champ scalaire existe, une onde d'amplitude non négligeable peut alors être émise : l'observation de la forme

d'onde permet donc aussi de tester des théories concurrentes de la gravitation [11].

1.4 Détection : dispositifs expérimentaux

1.4.1 Présentation

Les ondes gravitationnelles peuvent être observées par leurs effets indirects, par exemple les modifications de période indiquées dans l'équation 1.33. Elles ont d'ailleurs été mises en évidence pour la première fois par les diminutions de période du pulsar binaire PSR 1913+16 découvert par Hulse et Taylor en 1974 [12], et par les calculs effectués qui ont permis de vérifier l'adéquation entre les variations de période mesurées et celles calculées par une formule du type (1.32) [13].

La formule du quadrupôle prédit l'énergie perdue sous forme gravitationnelle d'un système :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2G}{5c^5} \sum_{\alpha\beta} \langle (\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 \rangle \quad (1.31)$$

Les crochets indiquent la valeur moyenne prise sur une période ou sur la durée du train d'onde. On peut vérifier par exemple que l'énergie perdue par unité de temps par deux masses m_1 et m_2 , en rotation à la pulsation ω , distantes de r , s'exprime :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{64G}{5c^5} \mu^2 r^4 \omega^6 \quad (1.32)$$

Par exemple, si on suppose que l'énergie est due à l'attraction newtonnienne $E = E_N$, on a (théorème du viriel) :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P}{E_N} \frac{dE_N}{dt} \quad (1.33)$$

où P est la période de rotation. En combinant les équations 1.31 et 1.33, et la troisième loi de Képler, on obtient

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{192\pi}{5c^5} \left(G\omega\mathcal{M} \right)^{5/3} f(e) \quad (1.34)$$

où $f(e)$ est une fonction connue de l'excentricité ($f(e) = 1$ si $e = 0$). Pour le pulsar PSR 1913+16, la valeur calculée avec 1.34 donne [14]

$$\frac{dP}{dt} = -(2,403 \pm 0,002).10^{-12} \quad (1.35)$$

Tandis que la valeur mesurée vaut [14]

$$\frac{dP}{dt} = -(2,40 \pm 0,09).10^{-12} \quad (1.36)$$

Ce pulsar semble donc indiquer de façon forte l'existence d'ondes gravitationnelles.

Il semble possible de construire en laboratoire des appareils directement sensibles aux variations de métrique. Le premier est un résonateur mécanique dans lequel une onde gravitationnelle dépose une partie de son énergie. La mesure de l'amplitude de vibration excitée par l'onde permet d'en déduire h . Le deuxième appareil fait une mesure différentielle de longueur dans deux axes orthogonaux : un interféromètre de type Michelson permet alors des mesures précises de h .

1.4.2 Barres résonnantes

Dans les années 1960, J. Weber a inventé puis amélioré le premier type de détecteurs d'ondes gravitationnelles [15]. Ceux-ci sont des résonateurs massifs isolés sismiquement. Ces barres cylindriques peuvent être modélisées par le schéma 1.4.

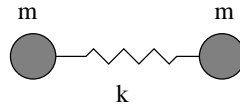


FIG. 1.4 – Schéma équivalent d'une barre de Weber

On choisit un matériau dont la résonance est aigue : une onde gravitationnelle excite celle-ci en y déposant une petite partie de son énergie, et après son passage, le solide continue de vibrer tant que l'énergie n'est pas dissipée [16]. Pour s'assurer qu'il ne s'agit pas d'une fausse alarme, il faut corréler les signaux d'au moins deux détecteurs.

Un tel système est soumis à deux types de limitations : le bruit sur le mouvement de la masse elle-même et le bruit de mesure. Le premier bruit de fond est dû à l'agitation aléatoire continue de la barre sous l'effet de sa température (ceci sera expliqué dans le chapitre sur le bruit thermique). Pour diminuer celui-ci, il faut une masse élevée et un matériau ayant un grand coefficient de surtension mécanique. Le refroidissement permet à la fois d'abaisser le bruit thermique et d'augmenter le coefficient de surtension (jusqu'à 10^{10}). Une autre difficulté est la mesure de très petites déformations ; le bruit mesuré est alors celui de l'amplificateur. Une grande attention doit être portée au transducteur : on utilise pour cela des cavités hyperfréquences ayant de forts coefficients de surtension. Enfin, si ces deux facteurs peuvent être surmontés, il reste la limitation quantique de la mesure des déformations de la barre.

Le principe de détection utilisant une résonance, ce détecteur n'a qu'une bande étroite (de largeur de l'ordre de 50 Hz). Il ne permet donc pas de reconstruire la forme du signal incident.

Actuellement il existe un réseau de telles antennes refroidies à 4 K (Explorer à Rome, Perth, Allegro à Stanford). De nouvelles antennes ultracryogénées sont en développement

(Nautilus à Rome et Auriga à Legnaro). Les futures antennes résonnantes seront sphériques, ce qui permettra de les rendre omni-directionnelles (projet graviton).

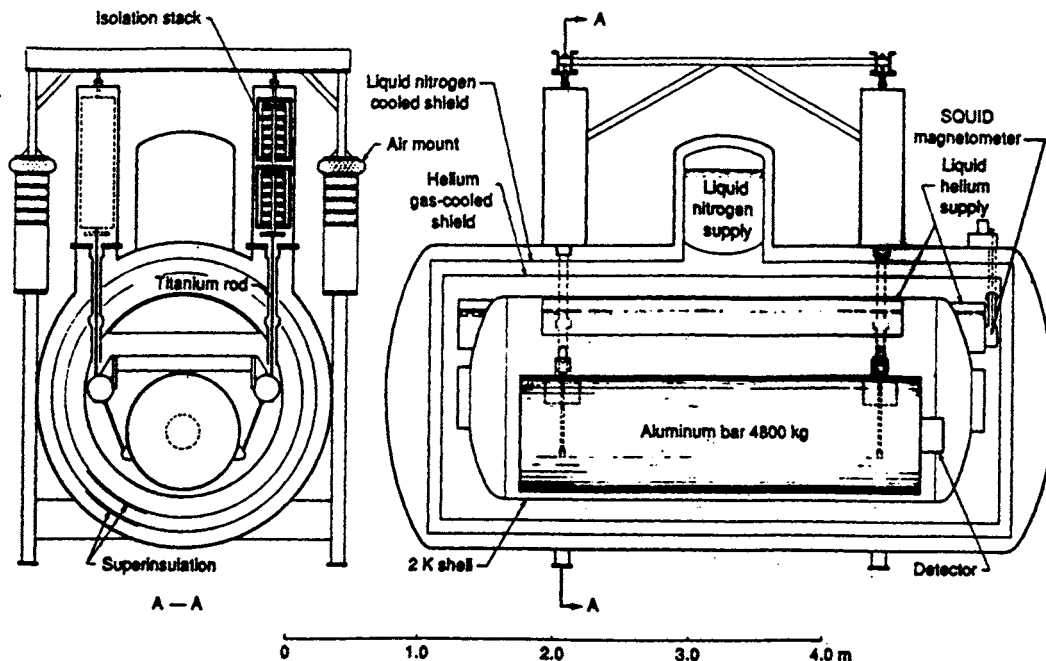
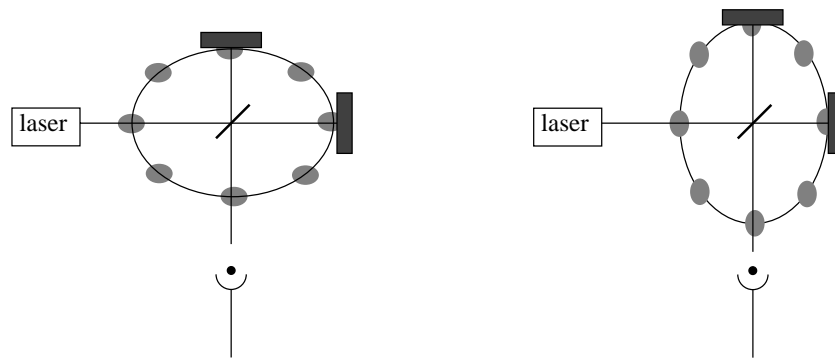


FIG. 1.5 – Schéma du détecteur résonnant cryogénique à Stanford

1.4.3 Détection interférométrique

Le principe de la détection interférométrique est basé sur la mesure de la déformation que l'espace-temps impose à un système de trois masses-test. Deux miroirs en chute libre matérialisent deux de ces masses-test. Une lame séparatrice envoie un faisceau laser sur chacun de ces miroirs et réalise ensuite l'interférence des faisceaux réfléchis.

FIG. 1.6 – *Principe de détection interférométrique*

Ce principe de détection demande à être affiné pour permettre une sensibilité suffisante : c'est ce que nous verrons au chapitre suivant. En particulier, pour diminuer la sensibilité au bruit de position des miroirs, il faut des bras kilométriques. Un avantage de ce type de détecteur sur le précédent est sa capacité à analyser le signal sur une large bande spectrale (de 10 Hz à 5 kHz pour un détecteur interférométrique contre une bande étroite d'environ 50 Hz autour de 900 Hz pour une barre de Weber). Les détecteurs à barre sont donc utiles pour confirmer une détection, et éventuellement pour une première indication du type de source. Seuls les détecteurs interférométriques en apportant $h(t)$ permettent des études astrophysiques.

De la même manière que pour les barres résonnantes, un réseau d'antennes interférométriques permet d'éviter les faux signaux par corrélation et autorise la détermination des coordonnées de la source par triangulation. Trois grandes antennes sont en cours de construction : deux antennes de 4 km aux États-Unis (projet LIGO [17]) dans les États de Washington et de Louisiane, et une antenne de 3 km dans les environs de Pise (projet franco-italien Virgo [18]). D'autres interféromètres légèrement plus courts compléteront le réseau : GEO (projet anglo-allemand de 600 m), TAMA (projet japonais de 300 m) et AIGO (projet australien de 400 m).

Chapitre 2

La détection interférométrique des ondes de gravitation

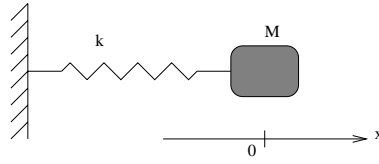
Ce chapitre montre comment un interféromètre de Michelson est un transducteur d'ondes gravitationnelles. Il détaille plus particulièrement comment une onde gravitationnelle se couple avec une cavité optique résonnante Fabry Perot ou un interféromètre tel que Virgo pour donner un signal détectable. Bien d'autres calculs seraient nécessaires pour démontrer la faisabilité du projet : les résultats présentés ici ne font que souligner ce qui fait la base du principe de détection. Nous voulons ici souligner l'enjeu d'une étude des bruits dans Virgo, en particulier le bruit thermique (deuxième partie) et le bruit de fréquence du laser (troisième partie). Les notions présentées sont également utiles pour la discussion ultérieure d'une mesure directe du bruit thermique (chapitre 4 de la deuxième partie).

2.1 Les miroirs sont des masses libres

Dans le chapitre précédent a été montré l'effet d'une onde gravitationnelle sur un anneau de particules libres. L'interféromètre Virgo utilise des masses suspendues cylindriques en silice dont une des faces est rendue réfléchissante par application de couches diélectriques. Ces substrats, aux fréquences d'analyse (dans la bande passante de l'interféromètre), peuvent être considérés comme des masses libres : c'est ce que nous allons montrer de façon qualitative ici (pour une démonstration plus rigoureuse, cf. par exemple [19], page 29).

Lorsqu'on applique une force F à une masse M en chute libre, celle-ci subit une accélération γ donnée par $F = M\gamma$. On pourra considérer les masses-test de Virgo comme libres si, à la fréquence d'analyse, cette formule peut être considéré comme valable.

Considérons une masse attachée à un support fixe par un ressort de raideur k (figure 2.1).

FIG. 2.1 – *Modèle simple de résonateur*

Si l'on exerce une force F de pulsation ω sur la masse, la relation entre F et le déplacement x ($x = 0$ au repos) est

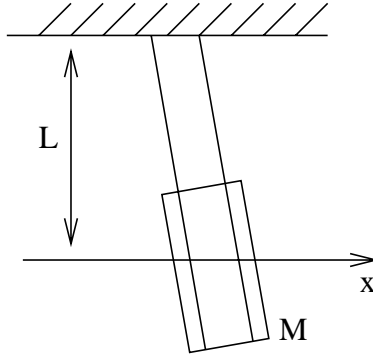
$$F = (k - M\omega^2)x \quad (2.1)$$

Soit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, la fréquence de résonance du système libre. La relation précédente s'écrit donc

$$F = M(\omega_0^2 - \omega^2)x \quad (2.2)$$

Lorsque $\omega^2 \gg \omega_0^2$, la masse peut donc être considérée comme libre, c'est-à-dire que l'effet de la rigidité du ressort est négligeable (et inversement, la masse rigidement fixée au support lorsque $\omega^2 \ll \omega_0^2$).

Dans le cas de Virgo les masses-test sont des miroirs cylindriques épais suspendus, comme représenté sur la figure 2.1.

FIG. 2.2 – *Les masses-test de Virgo*

La constante de raideur équivalente au schéma 2.1 est alors, pour un déplacement horizontal dans l'axe des bras de Virgo, $k_p = Mg/L_p$, où g est l'accélération de la pesanteur au niveau du sol ($9,81 \text{ m.s}^{-2}$) et L_p la longueur du pendule.

La suspension a une longueur de 0,7 m ; la fréquence de résonance est donc de $f_0 = f_p = 0,6 \text{ Hz}$. Toutes les fréquences dans la bande de détection de Virgo (10 Hz–5 kHz) vérifient $\omega^2 \gg \omega_0^2$. Les miroirs de Virgo sont donc des masses « en chute libre », dans l'axe du faisceau lumineux, aux fréquences où le signal est analysé.

2.2 Le transducteur : une cavité optique résonnante

2.2.1 Les cavités résonnantes Fabry Perot

Modèle de cavité optique résonnante

Une cavité Fabry Perot est une cavité optique résonnante (voir figure 2.3).

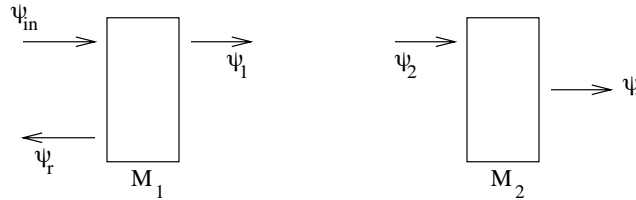


FIG. 2.3 – *Modèle d'une cavité résonnante*

L'onde laser incidente sur la cavité est un faisceau gaussien TEM_{00} (voir annexe A). On suppose par la suite que tous les fronts d'onde ont les mêmes rayons de courbure et même distribution de champ transverse aux points d'interférence (c'est-à-dire sur les détecteurs), et donc l'onde électromagnétique est entièrement décrite par le nombre complexe $\psi e^{i\omega t} = \psi_0 e^{i\varphi} e^{i2\pi\nu_{\text{opt}} t}$; ψ_0 est l'amplitude et φ la phase à l'origine. ν_{opt} est la fréquence de l'onde optique incidente sur la cavité. Pour une longueur d'onde de $\lambda = 1,064 \mu\text{m}$, $\nu_{\text{opt}} = 2,818 \cdot 10^{14}$ Hz. L_c est la longueur de la cavité. La puissance du laser incident sur la cavité est $P_{\text{in}} = \int \psi_0^2 dS$.

Les réflectivités pour l'onde ψ de chacun des miroirs sont respectivement r_1 et r_2 (en amplitude). Ces nombres sont normalement complexes, chaque miroir produit un déphasage fixe qui dépend du revêtement déposé. Cette phase n'apportant rien à la démonstration qui suit, r_1 et r_2 sont supposés réels. La figure 2.4 décrit les conventions de notation et de signe de réflexion et transmission en amplitude d'un miroir. Un signe moins sur le coefficient r sur la deuxième face est nécessaire pour la conservation de l'énergie dans une cavité Fabry Perot. La transmission t , la réflexion r et les pertes p vérifient la relation $t^2 + r^2 + p = 1$.

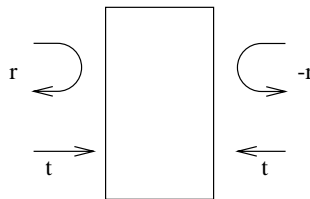


FIG. 2.4 – *Conventions pour les réflexions et transmissions sur un miroir*

Les champs ψ_1 , ψ_2 , ψ_r et ψ_t sont liés par les relations

$$\psi_1(t) = t_1\psi_{\text{in}}(t) - r_1r_2\psi_2(t - T) \quad (2.3)$$

$$\psi_2(t) = \psi_1(t - T) \quad (2.4)$$

$$\psi_t(t) = t_2\psi_2(t) \quad (2.5)$$

$$\psi_r(t) = r_1\psi_{\text{in}}(t) + t_1r_2\psi_1(t - T), \quad (2.6)$$

où T est le temps de trajet d'un aller dans la cavité. En fait, la variable T pour chacune des équations ci-dessus dépend de la position des miroirs à l'instant où se fait la réflexion. On suppose par la suite que les mouvements des miroirs sont suffisamment lents pour qu'on soit à chaque instant dans la solution quasi-statique ($T \approx \text{constante}$). Alors $T = L_c/c$, et la solution harmonique s'écrit :

$$\psi_1 = t_1\psi_{\text{in}} - r_1r_2e^{-i\alpha}\psi_1 \quad (2.7)$$

$$\psi_t = t_2e^{-i\alpha/2}\psi_1 \quad (2.8)$$

$$\psi_r = r_1\psi_{\text{in}} + t_1r_2e^{-i\alpha}\psi_1 \quad (2.9)$$

où

$$\alpha = \frac{4\pi\nu_{\text{opt}}L_c}{c} \quad ; \quad (2.10)$$

« c » est la vitesse de la lumière dans le vide. Il vient immédiatement :

$$\psi_1 = \frac{t_1}{1 + r_1r_2e^{-i\alpha}}\psi_{\text{in}} \quad (2.11)$$

$$\psi_t = \frac{t_1t_2e^{-i\alpha/2}}{1 + r_1r_2e^{-i\alpha}}\psi_{\text{in}} \quad (2.12)$$

$$\psi_r = \frac{r_1 + r_2(r_1^2 + t_1^2)e^{-i\alpha}}{1 + r_1r_2e^{-i\alpha}}\psi_{\text{in}} \quad (2.13)$$

Pour des résultats plus faciles à manier, introduisons les nouvelles variables [20] :

$$n = \frac{1}{1 - r_1r_2} \quad (2.14)$$

$$p_1 = 1 - r_1^2 - t_1^2 \quad (2.15)$$

$$p_c = 1 - r_2^2(1 - p_1) \quad (2.16)$$

$$x = np_c \quad (2.17)$$

$$\zeta = x - 1 \quad (2.18)$$

Comme on va le montrer plus loin, ζ est l'amplitude réfléchie à résonance ; il est alors évident que $-1 < \zeta < 1$. ζ exprime aussi le couplage de la cavité ; le cas $\zeta < 0$ est appelé sous-couplage, le cas $\zeta = 0$ couplage optimal et le cas $\zeta > 0$ sur-couplage.

La réflectivité d'une cavité s'écrit alors :

$$R = \frac{\psi_r}{\psi_{\text{in}}} = \frac{1}{r_2} \frac{(n-1) + (n-x)e^{-i\alpha}}{n + (n-1)e^{-i\alpha}} \quad (2.19)$$

Les cavités utilisées dans Virgo sont telles que $n \gg 1$. Les calculs qui suivent se placent dans cette hypothèse ; on admet que $r_2 \simeq 1$. Il vient

$$R = \frac{\zeta + 2(n-1-\zeta) \sin^2((\alpha + \pi)/2) + i(n-1-\zeta) \sin(\alpha + \pi)}{1 + 2(n-1) \sin^2((\alpha + \pi)/2) + i(n-1) \sin(\alpha + \pi)} \quad (2.20)$$

$R(\alpha)$ est périodique de période 2π . Autour des résonances $\alpha_0 = (2k+1)\pi$ (k est un entier), la réflectivité s'exprime en fonction de l'écart de phase à résonance $\delta\alpha$ ($\delta\alpha \ll 1$)

$$R \simeq \frac{\zeta + i n \delta\alpha}{1 + i n \delta\alpha} \quad (2.21)$$

ζ est la réflectivité en amplitude à résonance ($\delta\alpha = 0$).

La réponse en intensité et en phase de la fonction $R(\alpha)$ autour d'une résonance est montrée en figure 2.5.

Deux types de cavités sont couramment employées : les cavités telles que $r_1 \simeq r_2$, et les cavités telles que $r_2 \simeq 1$. Dans le premier type de cavités ($r_1 = r_2$), dans le cas où les pertes sont nulles, toute la lumière est transmise à résonance, et la lumière réfléchie est nulle. Un léger défaut d'appariement des miroirs $r_1 \leq r_2$ rend la cavité sous-couplée, si $p_1 = 0$. Si les réflectivités sont strictement identiques, les pertes p_1 amènent un sur-couplage. Dans le deuxième type de cavité $r_2 = 1$, ce sont les pertes du miroir d'entrée qui fixent le sur-couplage ou sous-couplage. Si ces pertes sont nulles ($p_1 = 0$), toute la lumière est réfléchie, quel que soit l'écart à résonance (et il y a bien conservation de la puissance).

Paramètres caractéristiques des cavités

La période de $|R(\nu_{\text{opt}})|$ (α est fonction de ν_{opt} par 2.10) est appelée intervalle spectral libre :

$$\text{ISL} = \frac{c}{2L_c} \quad (2.22)$$

La largeur à mi-hauteur Δf des pics de résonance définit la finesse de la cavité :

$$\mathcal{F} = \frac{\text{ISL}}{\Delta f} \approx \pi n \quad \text{si } n \gg 1 \quad (2.23)$$

$1/\text{ISL}$ est le temps d'un aller-retour de la lumière dans la cavité. Une cavité résonnante a des propriétés équivalentes à une ligne à retard de longueur nL_c . Le « temps de stockage » de la cavité se définit par :

$$T_s = \frac{n}{\text{ISL}} \quad (2.24)$$

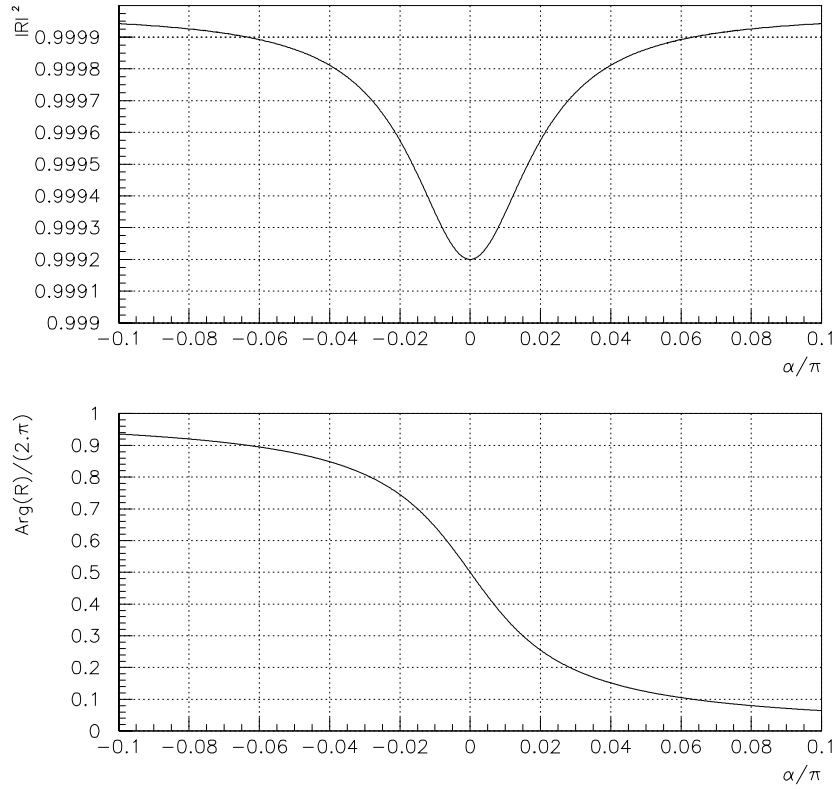


FIG. 2.5 – Réponse en intensité et en phase de la réflexion d’une cavité Fabry Perot, autour de $\alpha_0 = (2k + 1)\pi$, pour $n = 50/\pi$ et $\zeta = -1 + 4.10^{-4}$ (paramètres des cavités de Virgo). La réponse à mi-hauteur de $|R|^2$ est pour $\delta\alpha = \pm 1/n$.

Le contraste C d’une cavité est défini par :

$$C = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} = \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} \quad (2.25)$$

Il exprime la quantité de lumière qui n’est pas réfléchié à résonance, par rapport à la lumière incidente (hors résonance, toute la lumière est réfléchié).

Le dénominateur $1 + in\delta\alpha$ de l’équation 2.21 montre qu’une cavité optique se comporte comme un filtre fréquentiel passe-bas du premier ordre, $1 + in\delta\alpha = 1 + i\delta\nu/f_P$, où le pôle f_P est défini par

$$f_P = \frac{\text{ISL}}{2\mathcal{F}} \quad . \quad (2.26)$$

Remarquons que si la variation de phase $\delta\alpha$ est due à une onde gravitationnelle, $1 + in\delta\alpha = 1 + i(\nu_{\text{opt}}/f_P)h/2$. Les solutions (2.9) sont valables pour un mouvement quasi-statique, c’est-à-dire que les mouvements des miroirs ont des fréquences petites devant f_P .

A résonance, le champ intra-cavité est tel que

$$\psi_1 = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \psi_{\text{in}} \quad (2.27)$$

et on peut alors montrer que la puissance stockée s'écrit en fonction de la puissance incidente :

$$P_{\text{sto}} = G P_{\text{in}} \quad (2.28)$$

où le gain G est défini par

$$G = n(1 - \zeta) \quad (2.29)$$

Les trois paramètres suffisants pour décrire complètement une cavité en réflexion sont :

- l'intervalle de fréquence entre deux résonances, appelé intervalle spectral libre (ISL),
- sa finesse \mathcal{F} , ou bien de manière équivalente le nombre effectif d'aller-retour de la lumière dans les bras n ,
- le facteur de couplage ζ , compris entre -1 et $+1$; ce facteur est également l'amplitude du champ réfléchi à résonance par rapport au champ incident. Le contraste se déduit du couplage ζ par $C = (1 - \zeta^2)/(1 + \zeta^2)$.

Les cavités utilisées dans Virgo sont telles que $\mathcal{F} = 50$ ($n = 15,9$) ($r_1^2 \simeq 0,88$ et $r_2^2 \geq 0,99995$ [21]), $L_c = 3000$ m. On estime les pertes $p_1 \sim 2.10^{-5}$, et alors $x = 4.10^{-4}$ (le couplage ζ est tel que $\zeta \simeq -1$, les cavités sont fortement sous-couplées). L'intervalle spectral libre est 50 kHz et le temps de stockage $T_s = 3,18.10^{-4}$ s, soit un pôle à $f_P = 500$ Hz.

Paramètres géométriques

On a supposé par simplicité une cavité formée de deux miroirs plans, le mode de résonance étant une onde plane. En fait, une cavité résonnante est constituée soit de deux miroirs courbes, soit d'un miroir plan et d'un miroir courbe. La courbure des miroirs est adaptée au mode gaussien résonnant.

Les cavités de Virgo sont plan-courbe. Le col du faisceau se situe donc sur le miroir d'entrée plan. La taille du faisceau w_0 sur ce miroir est donnée par

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} z_0 \quad (2.30)$$

où z_0 est le paramètre de Rayleigh. Celui-ci est lié à la longueur de la cavité et vaut :

$$z_0 = \sqrt{L_c(R - L_c)}, \quad \text{soit} \quad z_0 = 1,160 \text{ km} \quad (2.31)$$

où $R = 3450$ m est le rayon de courbure du miroir et L_c la longueur de la cavité. Le col du faisceau vaut donc, sur le miroir d'entrée

$$w_0 = 1,98 \text{ cm} \quad (2.32)$$

La taille du faisceau en fonction de l'abscisse z s'exprime par

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.33)$$

Le faisceau sur les miroirs de fond a donc une taille de

$$w(3000) = 5,48 \text{ cm} \quad (2.34)$$

La divergence du faisceau s'exprime par

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad \text{soit} \quad \theta_0 = 17 \mu\text{rad} \quad (2.35)$$

Les cavités de l'interféromètre Virgo ont une longueur de 3 km. Pour éviter une trop grande divergence du faisceau et des miroirs d'extrémité de taille irréaliste, il faut choisir un col w_0 suffisamment grand. Une fois donnée la taille du faisceau, les miroirs ont un diamètre minimal pour ne pas introduire de pertes par diffraction (en fait, il faut éviter que la lumière perdue n'aille se réfléchir sur les parois et ne vienne ensuite se recombina au faisceau principal). Un diamètre minimal d'environ 5 fois la taille w du faisceau garantit cette condition, la puissance lumineuse non comprise n'est alors que $3,4 \cdot 10^{-6}$ fois la puissance incidente. Les paramètres du faisceau imposent donc des contraintes sur la taille des miroirs : le diamètre doit être d'au moins 10 cm sur les miroirs d'entrée et d'au moins 28 cm pour les miroirs d'extrémité.

2.2.2 Mesurer une phase pour détecter une onde gravitationnelle

Couplage d'une onde gravitationnelle à une cavité

Étudions maintenant la réponse d'une cavité Fabry Perot en réflexion (figure 2.6) à une onde gravitationnelle.

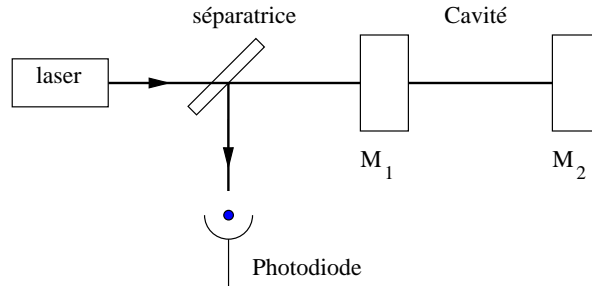


FIG. 2.6 – Utilisation d'une cavité Fabry Perot en réflexion

On suppose que l'onde arrive selon l'axe (Oz), la cavité étant orientée suivant l'axe (Ox); $h(t)$ est alors uniforme dans la cavité. La réponse de l'interféromètre à des ondes d'incidence quelconque est donnée par exemple dans [22].

L'onde gravitationnelle s'écrit $h(t) = h_0 \sin(\omega t + kz + \varphi)$. Calculons la distance parcourue par un faisceau lumineux entre deux points de coordonnées $x = 0$ et $x = L_c$. Le long du trajet, on a $dy = dz = 0$, et le photon suit une géodésique de l'espace-temps :

$$ds^2 = 0 = -(c dt)^2 + (1 + h)dx^2 \quad (2.36)$$

où h est l'onde « plus » (équation (1.11)) ($h \ll 1$); donc

$$c dt = \left(1 + \frac{h(t)}{2}\right) dx \quad (2.37)$$

$h(t)$ ne dépend que de t car (Oxy) est un plan d'onde. La distance parcourue par un photon de l'abscisse $x = 0$ à l'abscisse $x = L_c$ est :

$$L_a = \int_0^{L_c} c dt = \int_0^{L_c} dx \left(1 + \frac{h(x)}{2}\right) \quad (2.38)$$

où $h(x) = h_0 \sin\left(\frac{\omega x}{c} + \varphi\right)$. On trouve que L_a vaut

$$L_a = L_c \left[1 - \frac{h}{2} \frac{c}{\omega L_c} \left(\cos\left(\frac{\omega L_c}{c} + \varphi\right) - \cos(\varphi) \right) \right] \quad (2.39)$$

Le facteur $\omega L_c / c$ vaut $2\pi L_c / \lambda_g$, où λ_g est la longueur d'onde gravitationnelle. Pour les fréquences considérées ($f < 5$ kHz), les longueurs des ondes gravitationnelles sont beaucoup plus grandes que la longueur de la cavité ($\lambda_g > 60$ km). Finalement, dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes gravitationnelles,

$$L_a = L_c \left(1 + \frac{h(t)}{2}\right) \quad , \quad (2.40)$$

et la distance d'un trajet d'un aller-retour est

$$L_{ar} = 2L_c \left(1 + \frac{h(t)}{2}\right) \quad . \quad (2.41)$$

Le retard de phase α subi par un rayon ayant parcouru cette distance est donc $\alpha_0 + \delta\alpha$ où :

$$\alpha_0 = \frac{4\pi \nu_{\text{opt}} L_c}{c} = 2\pi \frac{\nu_{\text{opt}}}{\text{ISL}} \quad (2.42)$$

et

$$\delta\alpha = \alpha_0 \frac{h(t)}{2} \quad (2.43)$$

Le problème est donc maintenant de détecter les variations très petites de phase de l'équation 2.43.

Détection continue

La première solution qui vient à l'esprit est l'utilisation classique de la cavité, par mesure des franges.

Supposons qu'on règle la cavité sur la résonance ($\alpha_0 = 2k\pi$). Le faisceau réfléchi est $\psi_r = \psi_{\text{in}}\zeta$. La mesure de petites variations de phase $\delta\alpha$ donne alors :

$$\psi_r = \psi_{\text{in}} \left(\zeta + i n (1 - \zeta) \delta\alpha \right) \quad (2.44)$$

La mesure avec une photodiode de la puissance du faisceau réfléchi $|\psi_r|^2$ varie donc avec $\delta\alpha^2$, est du second ordre en $\delta\alpha$ (n'est pas linéaire) et ne convient pas.

Une possibilité pour y remédier est d'introduire un biais à la frange noire, par exemple se mettre à mi-hauteur de la courbe de réflexion en intensité de la figure 2.5. R vaut ≈ 1 en dehors de la résonance ; il faut donc rechercher le point $\alpha = \alpha_0 + \alpha_d$ tel que $|\psi_r/\psi_{\text{in}}|^2 = \frac{1+\zeta^2}{2}$; on trouve $\alpha_d = 1/n$. On a alors la puissance détectée sur la photodiode :

$$P_{\text{out}} = |\psi_r|^2 = P_{\text{in}} \left(\frac{1 + \zeta^2}{2} + \frac{n}{2} (1 - \zeta^2) \delta\alpha \right) \quad (2.45)$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est sensible aux fluctuations de puissance du laser d'entrée. Si $P_{\text{in}} = P_0 + \delta P$,

$$P_{\text{out}} = P_0 \frac{1 + \zeta^2}{2} + \delta P \frac{1 + \zeta^2}{2} + P_0 \frac{n}{2} (1 - \zeta^2) \delta\alpha \quad (2.46)$$

et une mesure d'onde gravitationnelle n'est pas possible, elle demanderait une stabilité d'amplitude du laser irréalisable. Plus précisément, une fluctuation de puissance crée un faux signal d'onde gravitationnelle

$$h_n = 2 \frac{\delta P}{P_0} \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \frac{1}{n \alpha_0} \quad (2.47)$$

Une stabilité de puissance $\frac{\delta P}{P_0} = 10^{-8} / \sqrt{\text{Hz}}$ est réalisable. Avec une cavité de longueur $L_c = 3000$ m, couplée optimalement ($\zeta = 0$), une finesse de $n = 50/\pi$, le seuil de sensibilité est alors $\tilde{h}_n \simeq 3,5 \cdot 10^{-20} / \sqrt{\text{Hz}}$, ce qui reste éloigné de la sensibilité de 10^{-22} ou 10^{-23} indispensable pour espérer détecter des sources.

Méthode Pound Drever

Avec la technique Pound Drever [23, 24], le faisceau laser est modulé en phase de manière à ce que l'information soit portée à une fréquence où le bruit d'amplitude du laser devient négligeable.

$$\psi_{\text{in}} = \psi_0 e^{i(2\pi\nu_{\text{opt}}t + m \sin \theta_m)} \quad (2.48)$$

où $\theta_m = \omega_m t + \varphi_m$, ω_m est la pulsation de modulation, m est l'indice de modulation (dans Virgo, la fréquence de modulation est de l'ordre de la dizaine de MHz). L'équation 2.48 peut se développer en (en ne tenant compte que des premières bandes latérales pour simplifier la démonstration) :

$$\psi_{\text{in}} = \psi_0 \left(J_0(m) + 2iJ_1(m) \sin(\theta_m) \right) e^{i2\pi\nu_{\text{opt}}t} \quad (2.49)$$

Les fonctions J_n sont les fonctions de Bessel. D'après l'équation 2.21, la porteuse subit une réflexion $\zeta + i n(1 - \zeta)\delta\alpha$, où $\delta\alpha$ est l'écart de phase à résonance. Les bandes latérales ne sont pas résonnantes dans la cavité, et sont donc entièrement réfléchies, sans déphasage. Il est alors aisé de montrer que la puissance recueillie sur la photodiode est :

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \left[\left(1 - J_0^2(m) \frac{1 - \zeta^2}{1 + n^2 \delta\alpha^2} \right) + 4J_0(m)J_1(m) \frac{n \delta\alpha(1 - \zeta)}{1 + n^2 \delta\alpha^2} \sin(\theta_m) \right] \quad (2.50)$$

où $\delta\alpha$ dépend du temps, $\delta\alpha(t) \ll 1$. Le premier terme du membre de droite est la puissance continue incidente sur le détecteur. Une détection synchrone donne le signal, la valeur efficace $s(t)$ de $\sin(\theta_m)$

$$s(t) = \eta P_{\text{in}} \frac{4}{\sqrt{2}} J_0(m) J_1(m) \frac{n \delta\alpha(1 - \zeta)}{1 + n^2 \delta\alpha^2} \quad (2.51)$$

où $\delta\alpha = \delta\alpha(t)$ et η est l'efficacité quantique du détecteur. La fonction $f(\delta\alpha) = \frac{n \delta\alpha(1 - \zeta)}{1 + n^2 \delta\alpha^2}$ donne le signal de Pound Drever (voir figure 2.7)

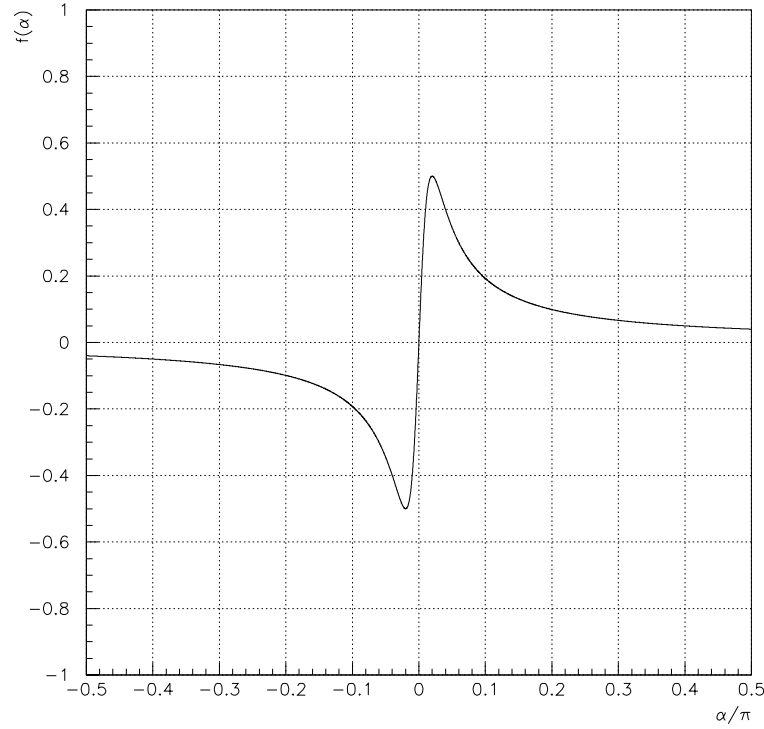


FIG. 2.7 – *Signal de Pound Drever. Les extrema sont atteints en $\delta\alpha = \pm 1/n$*

Lorsque la cavité est à résonance, et que l'on veut mesurer les variations de phase $\delta\alpha$, les bandes latérales (à la fréquence f_m) de la puissance recueillie sur la photodiode ont une amplitude proportionnelle au déphasage à mesurer $\delta\alpha$.

Les fluctuations de puissance du laser sont très faibles à la fréquence de modulation, on n'y est donc plus sensible.

Dans le cas de cavités comme celles de l'interféromètre Virgo ($\zeta \sim -1$), on obtiendrait après démodulation

$$s(t) = \eta P_{\text{in}} \frac{4}{\sqrt{2}} J_0(m) J_1(m) \frac{\nu_{\text{opt}}}{f_P} h(t) \quad (2.52)$$

L'indice de modulation pourrait être choisi pour optimiser $J_0(m)J_1(m)$, soit par exemple $m = 1,08$ (premier extremum) et alors $J_0(m)J_1(m) = 0,33898$. Mais ce n'est pas le signal qu'on désire optimiser, c'est le rapport signal à bruit.

2.2.3 Bruit de photons

Un des bruits fondamentaux dans une expérience d'optique telle que celle décrite ci-dessus est le bruit de photons. Il est connu que le nombre de photons détectés par unité de temps est une variable aléatoire poissonnienne. Le signal étant proportionnel au nombre de photons par unité de temps, il en résulte un bruit de mesure (en densité spectrale) :

$$\tilde{P} = \sqrt{2\eta P_{\text{DC}} h_p \nu_{\text{opt}}} \quad \left[\text{W}/\sqrt{\text{Hz}} \right] \quad (2.53)$$

h_p est la constante de Planck, P_{DC} la puissance continue incidente sur le détecteur, η l'efficacité quantique de ce dernier.

Le rapport signal à bruit ρ varie donc comme

$$\rho_{\text{photons}} \propto \sqrt{\frac{P_{\text{in}} \eta}{2h_p \nu_{\text{opt}}}} \quad (2.54)$$

Ce rapport est d'autant plus élevé que la puissance incidente est grande. Dans le cas d'un signal Pound Drever, si le bruit qui limite la détection est le bruit de photons alors le rapport signal à bruit vaut

$$\rho = \sqrt{\frac{\eta P_{\text{in}}}{h_p \nu_{\text{opt}}}} \frac{2J_0(m)J_1(m)(1-\zeta)}{\sqrt{1-(1-\zeta^2)J_0^2(m)}} n \delta\alpha \quad (2.55)$$

Nous discuterons dans le chapitre 4 de la deuxième partie de l'optimisation du facteur de couplage ζ et de l'indice de modulation m .

2.3 Interférométrie

Nous venons de voir comment la mesure de précision de la phase $\alpha(t)$ de la lumière réfléchiée par une cavité Fabry Perot permet la mesure de $h(t)$. Cependant d'autres problèmes de métrologie obligent à étoffer le principe de détection que l'on vient d'exposer.

Vu l'expression de α (équation 2.10), une variation de phase $\delta\alpha$ du faisceau laser réfléchi peut aussi être due à une variation de longueur (de chemin optique) de la cavité :

$$\delta\alpha = \alpha_0 \frac{\delta l}{L_c} \quad (2.56)$$

ou à une variation de fréquence du laser :

$$\delta\alpha = \alpha_0 \frac{\delta\nu_{\text{opt}}}{\nu_{\text{opt}}} \quad (2.57)$$

Par comparaison avec l'équation 2.43 on voit que ces variations de longueur ou de fréquence produisent un faux signal $h_n(t)$

$$h_n = 2 \frac{\delta l}{L_c} \quad (2.58)$$

$$h_n = 2 \frac{\delta \nu_{\text{opt}}}{\nu_{\text{opt}}} \quad (2.59)$$

2.3.1 Bruit de longueur des cavités

Le bruit sismique est un bruit sur la position des miroirs ; son amplitude spectrale est, dans un environnement normal et pour $f > 1$ Hz,

$$\tilde{x} = \frac{10^{-6}}{f^2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.60)$$

où f est la fréquence. Si les miroirs sont reliés directement au sol, le bruit de longueur des cavités noiera complètement tout signal de rayonnement gravitationnel. Dans Virgo, les miroirs sont donc suspendus à une chaîne de « super-atténuateurs », pendules couplés, qui rendent le bruit sismique négligeable dans la bande de fréquence de détection.

Le bruit thermique des miroirs ou de leurs suspensions provoquent eux aussi des fluctuations de longueur : c'est ce qui motive les recherches présentées dans la partie 2 de cette thèse.

On réduit la sensibilité de la mesure de $h(t)$ aux fluctuations de longueur en prenant de grandes cavités (cf. équation 2.58) : c'est pourquoi les détecteurs d'ondes gravitationnelles ont des cavités kilométriques.

2.3.2 Bruit de fréquence du laser

Il n'est pas possible en utilisant une simple cavité de s'affranchir des fluctuations de fréquence. En fait, il n'existe pas de laser ayant une stabilité de fréquence suffisante. Un laser Nd:YAG ($\lambda = 1,064 \mu\text{m}$), par exemple, a une stabilité de fréquence de l'ordre de

$$\tilde{\nu} = 100 \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right) \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.61)$$

Le seuil de sensibilité aux ondes gravitationnelles serait alors de (avec l'équation 2.59)

$$\tilde{h}_n = 7.10^{-13} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right) / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.62)$$

ce qui est très insuffisant.

La stabilité de fréquence d'un laser peut se définir par rapport à la stabilité de longueur d'une cavité Fabry Perot, si ses fluctuations de fréquence sont asservies sur la longueur de la cavité,

$$\frac{\delta\nu_{\text{opt}}}{\nu_{\text{opt}}} = \frac{\delta l}{L_c} \quad (2.63)$$

Pour avoir un système capable de détecter des ondes gravitationnelles, il faut donc asservir sa fréquence sur une cavité kilométrique de type Virgo.

2.3.3 Interféromètre de Michelson

Un interféromètre de type Michelson permet de faire mieux :

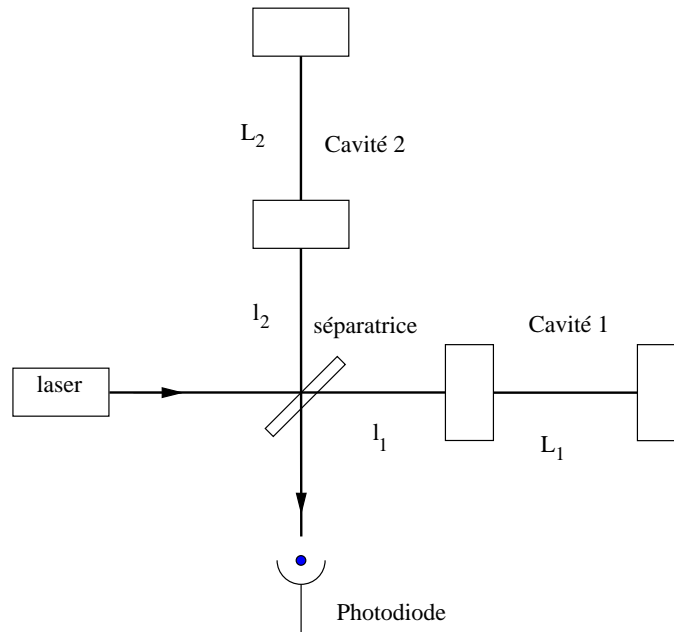


FIG. 2.8 – *Interféromètre de Michelson à cavités Fabry Perot*

Chacune des grandes cavités de longueurs L_1 et L_2 est à résonance. Dans une telle configuration, les variations de phase en réflexion de chacun des deux bras produites par une onde $h_+(t)$ sont de signes contraires (cf. équation 1.11), tandis que les variations de phase produites par des fluctuations de fréquence sont de même signe. La lumière reçue sur la photodiode est

$$\psi_{out} = \psi_{in} \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 e^{i\alpha_D}) \quad (2.64)$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les réflectivités des cavités Fabry Perot, réglées à résonance, dont l'expression est du type de celle figurant dans l'équation 2.21.

$$\rho_1 = \frac{\zeta_1 + i n_1 \delta\alpha_1}{1 + i n_1 \delta\alpha_1} \quad (2.65)$$

$$\rho_2 = \frac{\zeta_2 + i n_2 \delta\alpha_2}{1 + i n_2 \delta\alpha_2} \quad (2.66)$$

où α_1 et α_2 sont définis par

$$\alpha_1 = \frac{4\pi\nu_{\text{opt}}L_1}{c} \quad (2.67)$$

$$\alpha_2 = \frac{4\pi\nu_{\text{opt}}L_2}{c} \quad (2.68)$$

où L_1 et L_2 sont les longueurs des deux grands bras de 3 km, La cavité 1 est caractérisée par les paramètres n_1, ζ_1 ; la cavité 2 par n_2, ζ_2 . Posons $k_1 = n_1(1 - \zeta_1)$ et $k_2 = n_2(1 - \zeta_2)$.

Le signe moins dans l'équation 2.64 a été introduit pour rendre α_D analogue à un écart à la frange noire : les interférences sont destructives sur la photodiode. La détection utilise la technique Pound Drever, qui permet de s'affranchir des fluctuations d'amplitude de la source laser ; dans ce cas il n'y a pas d'écart statique à la frange noire, $\alpha_D = 0$.

Dans la configuration la plus simple qu'on puisse imaginer, $l_1 \approx l_2$. Mais alors, lorsque l'interféromètre est réglé sur la frange noire, les bandes latérales de la modulation de phase (à la fréquence f_m) sont en interférence destructive sur la photodiode de détection. On impose donc un décalage $l_1 = l_2 + \Delta l$. Les bandes latérales ayant une longueur d'onde légèrement différente de la porteuse, chacune a un retard de phase supplémentaire

$$\alpha_{\pm} = \pm 2\Delta l \frac{f_m}{c} \quad (2.69)$$

où le signe plus vaut pour l'onde $\nu_{\text{opt}} + f_m$ et le signe moins pour l'onde $\nu_{\text{opt}} - f_m$ (f_m est la fréquence de modulation). On ajuste Δl et f_m de manière à ce que l'interférence des bandes latérales soit constructive sur la photodiode. On dispose donc maintenant d'un signal que l'on peut démoduler.

Le calcul de la puissance recueillie sur la photodiode donne

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{4} & \left[\left((\zeta_1 - \zeta_2) J_0(m) \right)^2 \right. \\ & + 16 \sin^2(\theta_m) J_1^2(m) \\ & + 8 J_0(m) J_1(m) \sin(\theta_m) (k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2) \frac{h}{2} \\ & \left. + 8 J_0(m) J_1(m) \sin(\theta_m) (k_1 \alpha_1 - k_2 \alpha_2) \frac{\delta\nu_{\text{opt}}}{\nu_{\text{opt}}} \right] \end{aligned} \quad (2.70)$$

Le premier terme du membre de droite est nul si les deux cavités sont identiques ($\zeta_1 = \zeta_2$). On définit par $1 - C = (\zeta_1 - \zeta_2)^2 / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$ le défaut de contraste des deux cavités ; il n'y a donc pas rigoureusement une frange noire. Le deuxième terme donne une contribution des bandes latérales à la puissance continue recueillie sur les photodiodes. En fait, chacune des bandes latérales supérieures impaires donne un terme du même genre, et on peut alors remplacer $2J_1^2(m)$ par $\sum_{n=1}^{\infty} 2J_{2n+1}^2(m)$. Le troisième terme est le signal gravitationnel proprement dit. Le quatrième terme montre comment une fluctuation de fréquence du laser donne un faux signal ; ce terme serait nul si les deux bras de l'interféromètre étaient identiques.

On voit donc qu'un interféromètre à cavités Fabry Perot est moins sensible à une fluctuation de phase produite par un bruit de fréquence du laser qu'à une variation de phase produite par une onde gravitationnelle. Plus précisément, une fluctuation de fréquence donne un bruit $h_n(t)$

$$h_n(t) = \beta \frac{\delta \nu_{\text{opt}}(t)}{\nu_{\text{opt}}} \quad (2.71)$$

où le facteur d'asymétrie β est défini par

$$\beta = 2 \frac{k_1 \alpha_1 - k_2 \alpha_2}{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2} \quad (2.72)$$

Supposons les deux cavités quasiment identiques. Posons $L_c = L_1$, $\Delta L = L_1 - L_2$, $\Delta \zeta = \zeta_2 - \zeta_1$, $\Delta \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$. L'asymétrie s'écrit alors

$$\beta = \frac{\Delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}} + \frac{\Delta L}{L_c} + \frac{\Delta \zeta}{1 - \zeta} \quad (2.73)$$

On s'attend à ce que dans l'expérience Virgo l'asymétrie β soit inférieure à 1 % (avec une simple cavité, $\beta = 2$), due principalement à l'asymétrie des finesses et au défaut de contraste (il est difficile de réaliser des miroirs exactement identiques).

Le calcul de la lumière réfléchie par l'interféromètre vers la source laser montrerait qu'inversement le facteur d'asymétrie intervient pour l'onde gravitationnelle et non pour les fluctuations de fréquence. Ce signal réfléchi peut donc être utilisé pour asservir le laser en fréquence, sans gêner la détection d'ondes gravitationnelles.

2.3.4 Recyclage de la lumière

Dans l'interféromètre décrit ci-dessus, réglé sur la frange sombre, toute la lumière est réfléchie vers l'interféromètre. On place un miroir supplémentaire entre la source laser et la lame séparatrice. Ce miroir de recyclage est positionné pour construire une cavité résonnante avec les miroirs d'entrée des cavités Fabry Perot. Nous allons montrer que cela permet d'augmenter la puissance incidente sur les grandes cavités kilométriques. Le gain

de puissance s'exprime par un facteur G_{rec} . Tout se passe alors comme si le laser source avait une puissance $P_{\text{in}} G_{\text{rec}}$; le rapport signal à bruit est ainsi amélioré.

Les notations utilisées pour le calcul de la fonction de transfert d'un interféromètre à recyclage sont explicitées en figure 2.9.

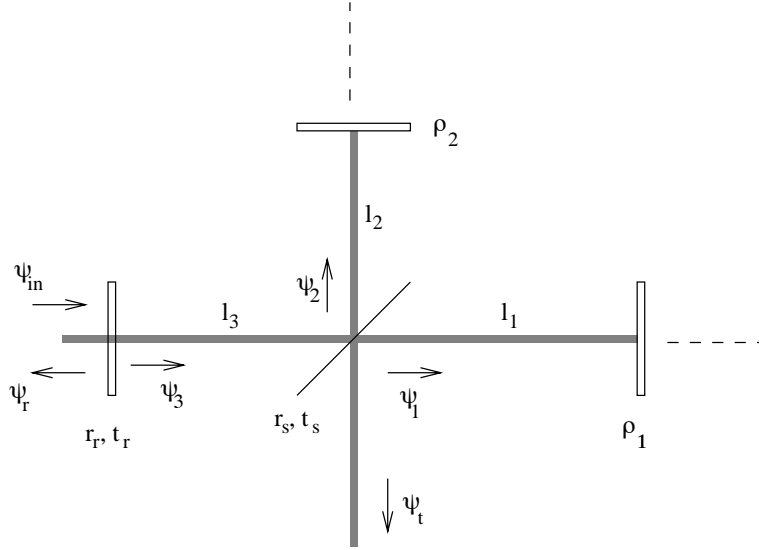


FIG. 2.9 – *Interféromètre à recyclage : notations*

Les réflectivités des cavités Fabry Perot sont notées par ρ_1 et ρ_2 , et s'expriment de la même façon que précédemment. Les cavités sont supposées être à résonance.

Les miroirs de recyclage et la séparatrice sont définis par r_r , t_r , r_s et t_s . Définissons α_{01} , α_{02} et α_3 de la façon suivante :

$$\alpha_{01} = \frac{4\pi\nu_{\text{opt}}l_1}{c} \quad (2.74)$$

$$\alpha_{02} = \frac{4\pi\nu_{\text{opt}}l_2}{c} \quad (2.75)$$

$$\alpha_3 = \frac{4\pi\nu_{\text{opt}}l_3}{c} \quad (2.76)$$

où l_1 , l_2 et l_3 définissent les longueurs de la cavité de recyclage ; l_1 , l_2 et l_3 sont des longueurs

très petites devant 3 km. Les champs ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ψ_{in} , ψ_r et ψ_t sont liés par les relations

$$\psi_2 = r_s e^{-i\alpha_3/2} \psi_3 \quad (2.77)$$

$$\psi_1 = t_s e^{-i\alpha_3/2} \psi_3 \quad (2.78)$$

$$\psi_3 = t_r \psi_{\text{in}} + r_r e^{-i\alpha_3/2} \left[r_s \rho_2 e^{-i\alpha_{02}} \psi_2 - t_s \rho_1 e^{-i\alpha_{01}} \psi_1 \right] \quad (2.79)$$

$$\psi_r = r_r \psi_{\text{in}} - t_r e^{-i\alpha_3/2} \left[r_s \rho_2 e^{-i\alpha_{02}} \psi_2 - t_s \rho_1 e^{-i\alpha_{01}} \psi_1 \right] \quad (2.80)$$

$$\psi_t = t_s \rho_2 e^{-i\alpha_{02}} \psi_2 + r_s \rho_1 e^{-i\alpha_{01}} \psi_1 \quad (2.81)$$

Posons

$$q = e^{-i\alpha_3} \left(r_s^2 \rho_2 e^{-i\alpha_{02}} - t_s^2 \rho_1 e^{-i\alpha_{01}} \right) \quad (2.82)$$

L'interféromètre est réglé sur la frange noire en réglant les distances l_1 et l_2 telles que $\alpha_{02} = \alpha_{01} + (2k + 1)\pi$ (k est un entier). La cavité de recyclage est rendue résonnante, par réglage de la longueur l_3 , avec $\alpha_3 + \alpha_{01} = 2k'\pi$ (k' est un entier). Les champs stocké, réfléchi et transmis s'expriment alors en fonction du champ incident par

$$\frac{\psi_3}{\psi_{\text{in}}} = \frac{t_r}{1 - r_r q} \quad (2.83)$$

$$\frac{\psi_r}{\psi_{\text{in}}} = \frac{r_r - (1 - p_r)q}{1 - r_r q} \quad (2.84)$$

$$\frac{\psi_t}{\psi_{\text{in}}} = e^{-i(\alpha_{02} + \alpha_3/2)} \frac{t_r r_s t_s (\rho_1 - \rho_2)}{1 - r_r q} \quad (2.85)$$

Ces expressions sont formellement identiques à celles obtenues pour une cavité simple, dont le miroir d'entrée serait défini par r_r , t_r et le miroir de fond par une réflectivité q et une transmission $t = r_s t_s (\rho_1 - \rho_2)$. Définissons, comme pour une cavité :

$$n_r = \frac{1}{1 - q_0 r_r} \quad (2.86)$$

$$p_r = 1 - r_r^2 - t_r^2 \quad (2.87)$$

$$p_{cr} = 1 - q_0^2 (1 - p_r) \quad (2.88)$$

$$x_r = n_r p_{cr} \quad (2.89)$$

$$\zeta_r = x_r - 1 \quad (2.90)$$

A résonance,

$$q = q_0 = -(r_s^2 \zeta_2 + t_s^2 \zeta_1) \quad (2.91)$$

$$t = t_0 = r_s t_s (\zeta_1 - \zeta_2) \quad (2.92)$$

Le gain de recyclage en puissance est défini, de manière similaire à la puissance stockée dans une cavité, par

$$G_{\text{rec}} = n_r(1 - \zeta_r) \quad (2.93)$$

Dans l'interféromètre Virgo, on désire que la cavité de recyclage soit couplée optimalement. Cette condition implique une valeur limite pour le gain de recyclage : $\zeta_r = 0$ et $x_r = 1$ mènent à $G_{\text{rec}} = 1/p_{cr}$. La valeur exacte du gain de recyclage dépend des pertes, qui ne sont pas encore connues. On prendra à titre indicatif $G_{\text{rec}} = 50$ pour les calculs. Comme le gain de recyclage doit être au minimum de quelques unités, il faut que dans Virgo, ζ_1 et ζ_2 sont négatifs et proches de -1 . Les cavités Fabry Perot doivent donc être sous-couplées, et cela en limite la finesse.

Autour de la résonance des grands bras, la réflectivité q s'exprime par

$$q = q_0(1 + i\gamma) \quad (2.94)$$

où γ est une petite fluctuation de phase ($\gamma \ll 1$). On peut alors montrer qu'autour de la résonance de l'interféromètre, les fluctuations γ provoquent des modifications de réflectivité du système interféromètre à recyclage :

$$\frac{\psi_r}{\psi_{\text{in}}} = \frac{\zeta_r + in_r\gamma}{1 + in_r\gamma} \quad (2.95)$$

Autour de la résonance, le déphasage γ est donné par :

$$\begin{aligned} \gamma = & \delta\alpha_3 + \delta\alpha_{01} - \zeta_2\delta(\alpha_{02} - \alpha_{01}) \\ & + r_s^2 \left((1 - \zeta_2)\zeta_2 n_2 \delta\alpha_2 - (1 - \zeta_1)\zeta_1 n_1 \delta\alpha_1 \right) \\ & + (1 - \zeta_1)(1 - p_s)\zeta_1 n_1 \delta\alpha_1 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Les trois premiers termes du membre de droite sont négligeables dans le cas de fluctuations de fréquences ou d'une onde gravitationnelle.

Dans le cas d'un déphasage dû à des fluctuations de fréquences, le quatrième terme est négligeable en raison de la symétrie entre les deux bras. Le cinquième terme donne alors $(1 - \zeta_1)(1 - p_s)\zeta_1 \delta\nu / f_{P1}$ où f_{P1} est le pôle d'un des grands bras (500 Hz). Le terme $(1 + in_r\gamma)$ devient alors $1 + in_r(1 - \zeta_1)\zeta_1 n_1 \delta\alpha_1$, et l'interféromètre se comporte en réflexion comme une cavité de fréquence de coupure

$$f_{PR} = \frac{f_{P1}}{n_r(1 - \zeta_1)} \quad (2.97)$$

f_{P1} est le pôle des cavités kilométriques (500 Hz). Avec une cavité de recyclage couplée optimalement ($\zeta_r = 0$), un gain de recyclage $G_{\text{rec}} = n_r(1 - \zeta_r) = 50$, les cavités kilométriques sous-couplées ($\zeta_1 \simeq -1$), le pôle de l'interféromètre en réflexion est de 5 Hz.

Pour une onde gravitationnelle, le déphasage γ est (si les cavités sont peu asymétriques)

$$\gamma = \beta'(1 - \zeta_1)n_1\alpha_1\frac{h}{2} \quad (2.98)$$

où l'asymétrie β' est définie avec l'asymétrie déjà rencontrée β et l'asymétrie ϵ de la séparatrice : $t_s^2 = r_s^2 + \epsilon$

$$\beta' = \beta + \epsilon \quad (2.99)$$

Dans le cas d'un interféromètre idéalement symétrique, les bandes latérales (à la fréquence de l'onde gravitationnelle) créées par l'onde gravitationnelle ne sont pas du tout recyclées. Si l'asymétrie est légère, le recyclage de ces bandes latérales est négligeable. La fonction de transfert de l'interféromètre en transmission devient :

$$\frac{\psi_t}{\psi_{\text{in}}} = \sqrt{G_{\text{rec}}} \left[t_0 + i 2n_1\alpha_1\frac{h}{2} \right] \quad (2.100)$$

Tout se passe comme si la puissance lumineuse incidente était $G_{\text{rec}}P_{\text{in}}$.

2.3.5 Bruit de photons dans Virgo

L'interféromètre Virgo est un interféromètre de Michelson à recyclage avec des cavités Fabry Perot. Le seuil de détection est supposé limité par le bruit de photons. Pour calculer le bruit de photons, on se place dans le cas d'une détection continue. L'écart à la frange noire est noté α_D .

La fonction de transfert de l'interféromètre est

$$\psi_t = \sqrt{G_{\text{rec}}}\psi_{\text{in}}r_s t_s (\rho_1 - \rho_2 e^{-i\alpha_D}) \quad (2.101)$$

Les réflectivités ρ_1 et ρ_2 des cavités Fabry Perot varient si une onde gravitationnelle est présente :

$$\rho_1 = \zeta_1(1 + i\phi_1) \quad (2.102)$$

$$\rho_2 = \zeta_2(1 + i\phi_2) \quad (2.103)$$

où les déphasage ϕ_1 et ϕ_2 sont de même valeur, de signes opposés, si l'asymétrie est faible ; $\phi_1 = n_1((1 - \zeta_1)/\zeta_1)\alpha_1 h/2 \simeq (\nu_{\text{opt}}/f_{P1})h$ et $\phi_2 = -\phi_1$.

On trouve alors que la puissance incidente sur le détecteur s'exprime par

$$P_t = G_{\text{rec}}P_{\text{in}} \left(\frac{(\zeta_1 - \zeta_2)^2}{4} + \zeta_1\zeta_2 x + 2\zeta_1\zeta_2 \sqrt{x(1-x)}\phi_1 \right) \quad (2.104)$$

où $x = \sin^2(\alpha_D/2)$.

L'optimisation du rapport signal à bruit (où le bruit est le bruit de photons) conduit à $x = |\zeta_1 - \zeta_2|/2$. Ce rapport vaut alors, en densité spectrale,

$$\rho = \sqrt{\frac{\eta G_{\text{rec}} P_{\text{in}}}{2 h_p \nu_{\text{opt}}}} 2 \frac{\nu_{\text{opt}}}{f_{P1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_P}\right)^2}} \tilde{h}_n \quad (2.105)$$

où la propriété de filtrage de la cavité a été ajoutée. Le seuil de détection est alors

$$\tilde{h}_n = \sqrt{\frac{2 h_p \nu_{\text{opt}}}{\eta G_{\text{rec}} P_{\text{in}}}} \frac{f_P}{2 \nu_{\text{opt}}} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_P}\right)^2} \quad (2.106)$$

soit

$$\tilde{h}_n = 1,7 \cdot 10^{-23} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{500}\right)^2} \quad (2.107)$$

avec $\eta P_{\text{in}} = 20$ W. Ceci représente la sensibilité de Virgo limitée par le bruit de photons seulement.

La détection se fait en réalité à l'aide des bandes latérales à la fréquence de modulation f_m . Le seuil de détection donné ici est donc le seuil minimal.

2.4 Bruits et sensibilité

2.4.1 Sources de bruit

Différentes sources de bruit limitent le seuil de détection.

Par asservissement de la fréquence du laser sur la lumière réfléchiée par l'interféromètre, on peut s'affranchir du bruit de fréquence (voir la troisième partie de cette thèse).

Les fluctuations de position des miroirs donnent un bruit de longueur des cavités (équation 2.58). Ces fluctuations peuvent être produites par le bruit sismique : on s'en affranchit par une chaîne d'atténuateurs. Elles peuvent également venir des vibrations internes des miroirs et de leurs suspensions sous l'effet de la température : une étude détaillée est nécessaire pour en préciser l'effet. C'est l'objet de la deuxième partie.

Les fluctuations d'indice du milieu où se propage le faisceau provoquent également un bruit sur la mesure de phase. Il faut donc faire le vide sur le trajet du faisceau pour rendre ces fluctuations négligeables. Le niveau de vide des enceintes dans lesquelles se propage le faisceau est donc très poussé, de l'ordre de 10^{-7} à 10^{-8} mbar. Le bruit de phase créé par les fluctuations d'indice est alors négligeable devant le bruit de photon [19].

Le faisceau incident sur l'interféromètre n'est pas idéal ; en particulier, il possède des distorsions de front d'onde. Les fluctuations de celles-ci détériorent le rapport signal à bruit. Pour corriger les fluctuations angulaires du pointé du faisceau incident, les fluctuations de fréquence et les fluctuations d'amplitude de ce même faisceau, il est filtré avant l'interféromètre par une grande cavité appelée « Mode Cleaner ». En sortie, le faisceau a un front d'onde perturbé par les imperfections de l'interféromètre, ce qui réduit le contraste. Le faisceau portant l'interférence est donc filtré par une petite cavité optique. On consultera [25] pour une étude de la réponse de l'interféromètre à un faisceau de géométrie non idéale.

La surface des miroirs n'est pas parfaitement plane. La rugosité déforme le front d'onde et diffuse la lumière sur les parois du tube à vide. Ces parois sont mises en mouvement par le bruit sismique ; la partie de la lumière qui se réfléchit contre le tube et se recombine avec le faisceau principal provoque une erreur de phase simulant une onde gravitationnelle. Le niveau de bruit provoqué par cette lumière diffusée peut être réduit en la piégeant.

La maîtrise de ces bruits amène à la conception de l'interféromètre Virgo exposée en figure 2.10

2.4.2 Analyse du signal

Le bruit de fond de l'interféromètre Virgo est une superposition de bruits d'origines différentes. Ce n'est pas un bruit blanc ; il est donc préférable d'exprimer ce bruit en densité spectrale. Une simple condition sur la valeur crête du signal ($s(t) > \text{seuil}$) recueilli sur la photodiode (après démodulation) ne permet pas de décider si l'information recherchée est présente, si l'amplitude de celle-ci est trop faible. Nous terminons donc en décrivant comment la densité spectrale (la sensibilité de l'interféromètre) que nous calculerons dans les chapitres suivants permet d'analyser le signal.

Densité spectrale du bruit de fond

Le bruit de fond $n(t)$ est un signal aléatoire ; son autocorrélation vaut :

$$R(\tau) = \langle n(t) n(t + \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) n(t + \tau) dt \quad (2.108)$$

où T est le temps de mesure. La densité spectrale de bruit de $n(t)$ est liée à la fonction d'autocorrélation :

$$S_n(f) = TF[R(\tau)] \quad (2.109)$$

où TF est la transformée de Fourier.

La transformée de Fourier du signal déterministe $s(t)$ est notée $\tilde{s}(f)$. $\tilde{n}(f)$ note par la suite $\sqrt{S_n(f)}$; s'il s'agit d'un bruit de longueur, il est donc noté \tilde{x} , s'il s'agit d'un bruit de

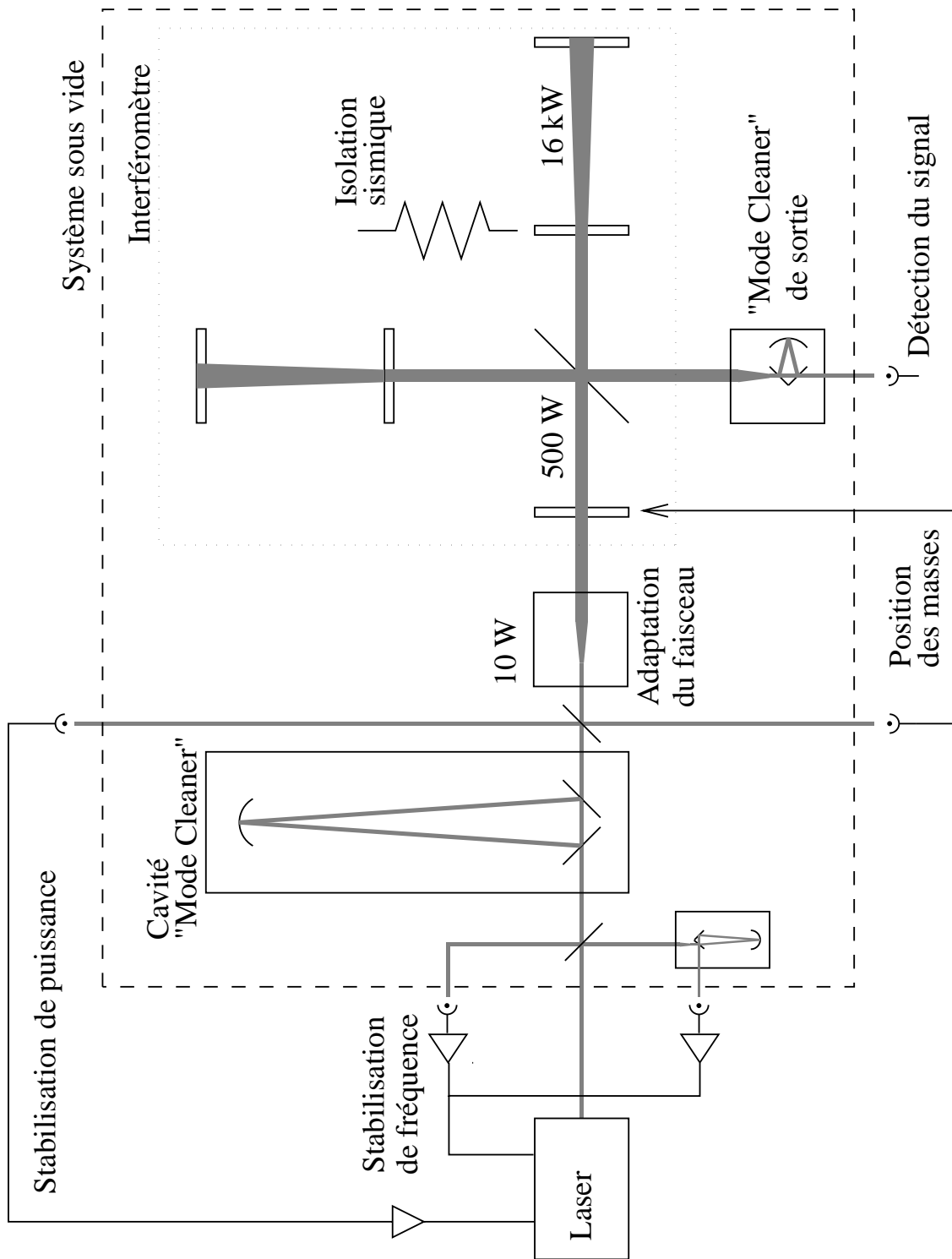


FIG. 2.10 – Schéma-bloc de l'interféromètre Virgo

fréquence $\tilde{\nu}$ et s'il s'agit du seuil de détection de l'interféromètre \tilde{h}_n . Si $n(t)$ s'exprime en mètres (ou Hz,...), $R(t)$ s'exprime en m^2 , et $\tilde{n}(f)$ en $m/\sqrt{\text{Hz}}$.

Les chapitres suivants ont pour but le calcul de $S_n(f)$ du bruit thermique.

Filtre adapté

Lors de la détection d'une onde gravitationnelle, le signal $s(t)$ est noyé dans le bruit de fond du détecteur $n(t)$. La mesure $x(t)$ est $x(t) = s(t) + n(t)$. Dans le cadre d'une analyse linéaire, la mesure $x(t)$ est filtrée pour faire ressortir le signal du bruit par un filtre de réponse fréquentielle $h(f)$. Le résultat $x'(t)$ du filtrage est la somme de $s'(t)$ et de $n'(t)$. La fonction de transfert du filtre s'exprime par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa réponse fréquentielle \tilde{h} .

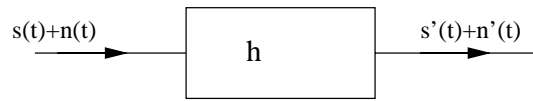


FIG. 2.11 – Filtrage du signal

On définit le rapport signal à bruit ρ à l'instant t_0 par la fraction de puissance du signal sur la puissance moyenne de bruit

$$\rho^2 = \frac{s'^2(t_0)}{\langle n'^2(t_0) \rangle} \quad (2.110)$$

On désire trouver le filtre \tilde{h} qui maximise le rapport signal à bruit. Le dénominateur de 2.110 s'écrit

$$\langle n'^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |\tilde{h}|^2 df \quad (2.111)$$

Le numérateur vaut

$$s'^2(t_0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(f) \tilde{h}(f) e^{2\pi f t_0} df \right]^2 \quad (2.112)$$

Supposons connu le signal à détecter $s(t)$, incident à l'instant t_0 . On montre que le filtre qui maximise le rapport signal à bruit est

$$\tilde{h}(f) = k \frac{\tilde{s}^*(f)}{S_n(f)} e^{-i2\pi f t_0} \quad (2.113)$$

où k est une constante réelle et \tilde{s}^* est le conjugué complexe de \tilde{s} . Le rapport signal à bruit maximal vaut alors

$$\rho = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(f)|^2}{S_n(f)} df \right]^{1/2} \quad (2.114)$$

Le filtre h de l'équation 2.113 maximise le rapport signal à bruit, c'est pour cela qu'il est appelé filtre optimal. Concrètement, on ne dispose pas de $s(t)$ mais de $x(t)$. On calculera donc

$$\rho = \left[\frac{x'^2(t_0)}{\langle n'^2(t_0) \rangle} \right]^{1/2} \quad (2.115)$$

ρ est maximal si le signal $s(t)$ est présent à l'instant t_0 .

Une condition $\rho > \rho_{\min}$ permet de décider si l'information recherchée $s(t)$ est présente dans la mesure $x(t)$ (par exemple $\rho_{\min} = 2$).

Les densités spectrales considérées par la suite ne comprennent que les fréquences positives ; les densités spectrales de bruit sont repliées et la valeur quadratique moyenne du bruit de fond se calcule par

$$\langle n^2 \rangle = \int_0^\infty S_n(f) df \quad (2.116)$$

La connaissance de $S_n(f)$ est donc indispensable pour décider si le signal $s(t)$ est présent dans la mesure ou non. Le but de cette thèse est finalement de fournir une estimation de $S_n(f)$.

2.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de préciser les principes de fonctionnement d'un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles. Détecter une onde de gravitation, c'est donc pouvoir mesurer avec une très grande précision la phase d'une interférence en sortie de l'interféromètre. Cette mesure devant être très précise, tous les bruits venant la perturber doivent être réduits au-dessous du niveau de signal attendu.

Deuxième partie

Modèle de bruit thermique

Chapitre 1

Le bruit thermique : généralités

1.1 Enjeux de l'étude pour Virgo

La sensibilité de l'antenne gravitationnelle Virgo est limitée dans la partie basse de son spectre par le bruit thermique (cf. 1.6). Il est important de garantir, voire d'améliorer cette sensibilité. En effet, de celle-ci dépend le nombre d'événements astrophysiques qui sont détectables (au-dessus du seuil de bruit). Contrairement aux antennes électromagnétiques sensibles à l'intensité, l'interféromètre est sensible au champ $h(t)$ lui-même. L'amplitude des ondes décroissant en $1/R$, gagner un facteur 2 sur la sensibilité, c'est multiplier par 8 les chances de détection.

Une étude approfondie du bruit thermique permet, d'une part, d'améliorer l'estimation de la sensibilité, et d'autre part de faire des propositions pour réduire le niveau des bruits pour des générations ultérieures d'antennes. Pour l'expérience Virgo deux sources de bruits sont prépondérantes : le bruit thermique des substrats des miroirs des cavités Fabry Perot de 3 km, et le bruit thermique de leurs suspensions. Chacune des sources recouvre un domaine spectral différent.

Les résultats aident au choix des substrats des miroirs, de leurs suspensions, des méthodes de fixation. Ces études sont entreprises par les équipes construisant des antennes gravitationnelles interférométriques. Plus particulièrement, à Orsay, nous avons mené des expériences pour aider au choix des matériaux des suspensions. D'autres expériences sur des cylindres en silice ont permis d'en vérifier les fréquences de résonance et de mesurer le coefficient de qualité de celles-ci. Mon travail a en particulier permis d'évaluer de façon plus précise le bruit thermique des miroirs. Les résultats permettent de fixer les dimensions des substrats, de faire des propositions pour le choix du matériau, et de mettre à jour la courbe de sensibilité de Virgo.

Une maîtrise du bruit thermique est également nécessaire dans d'autres expériences de physique nécessitant des mesures de grande précision. C'est par exemple la limite de la stabilité d'oscillateurs référencés à des cavités optiques, c'est une des limites pour la

détection d'ondes gravitationnelles par barres résonnantes. Les processus de relaxation dans les solides, qui produisent le bruit thermique, sont aussi la limite dans la mesure de la constante de gravitation par pendule de torsion.

Pour étudier le bruit thermique, nous commencerons par rappeler quelques résultats élémentaires sur l'oscillateur harmonique, modèle utilisé en permanence par la suite. La connaissance des fréquences de résonance et des dissipations des ondes acoustiques permet de prévoir l'amplitude du bruit thermique par le théorème fluctuation-dissipation. Nous discuterons ensuite des vibrations dans les solides. Cela nous permettra de comprendre l'origine des résonances, et de calculer grossièrement la fréquence du mode fondamental. La méthode de calcul précise est exposée dans le chapitre sur le bruit thermique des miroirs. Nous verrons quelques processus possibles expliquant la dissipation des ondes acoustiques dans les solides. Certaines des hypothèses sur les causes de dissipation font intervenir des phénomènes complexes de physique du solide, et une compréhension de tous ceux qui sont en jeu est loin d'être achevée. Nous serons donc souvent amenés, pour l'étude des dissipations, à une approche empirique de mesure de l'amortissement du son dans les matériaux. Ce chapitre se poursuit par une première évaluation du spectre de sensibilité de Virgo. La mesure de coefficients de qualité élevés n'est pas aisée : nous examinerons quelques méthodes de mesure.

1.2 L'oscillateur harmonique

1.2.1 Paramètres

Soit un résonateur amorti modélisé par :

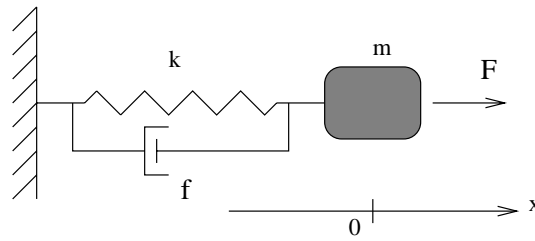


FIG. 1.1 – *Modèle simple de résonateur amorti*

Les paramètres décrivant l'oscillateur sont sa masse m , la constante de raideur k , le frottement f_d . L'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse lorsqu'on applique une force F est :

$$F = m\ddot{x} + f_d\dot{x} + kx \quad (1.1)$$

x désigne la coordonnée autour de la position d'équilibre, le point la dérivée par rapport au temps. Après une transformée de Fourier, on obtient :

$$\tilde{F} = [(k - m\omega^2) + if_d\omega] \tilde{x} \quad (1.2)$$

L'impédance mécanique $Z(\omega)$ est définie par :

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{F}}{\tilde{v}} \quad (1.3)$$

où $\tilde{v} = i\omega\tilde{x}$ est la vitesse. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on a donc

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega} [(k - m\omega^2) + if_d\omega] \quad (1.4)$$

Si l'excitation F est une impulsion, la réponse x sera :

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} \sin(\omega_d t) \quad (1.5)$$

Si $f_d = 0$, la réponse est purement sinusoïdale ($\tau = \infty$) de pulsation $\omega_d = \omega_0$ où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Si $f_d \neq 0$, on peut vérifier que le temps de relaxation τ et la pulsation ω_d vérifient :

$$\tau = \frac{2m}{f_d} \quad (1.6)$$

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{\tau^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \quad (1.7)$$

où le facteur de qualité Q est défini par

$$Q = \frac{\omega_0\tau}{2} = \frac{m\omega_0}{f_d} \quad (1.8)$$

L'amplitude $x(t)$ décroît de $e^{-T/\tau}$ en une période T ; l'énergie dissipée ΔE pendant cet intervalle de temps vaut donc

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2T}{\tau} = \frac{2\pi}{Q} \quad (1.9)$$

On utilise aussi couramment le décrément logarithmique Δ , défini par l'inverse du nombre N d'oscillations lorsque l'amplitude de $x(t)$ a décru dans un rapport $1/e$. On vérifie que

$$\Delta = \frac{\pi}{Q} \quad (1.10)$$

Δ est aussi lié au rapport des amplitudes des oscillations n et $n+1$:

$$\Delta = \ln(a_n/a_{n+1}) \quad (1.11)$$

L'impédance $Z(\omega)$ peut s'écrire :

$$Z(\omega) = \frac{m}{\omega} \left[\frac{\omega\omega_0}{Q} + i(\omega^2 - \omega_0^2) \right] \quad (1.12)$$

Si l'excitation F est un bruit blanc F_0 , le spectre de \tilde{x} est (même spectre que la réponse impulsionnelle) :

$$\tilde{x}^2 = \frac{F_0^2}{\omega^2 |Z(\omega)|^2} = \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2} \quad (1.13)$$

et si $Q \gg 1$, on peut vérifier qu'on obtient un pic à la fréquence ω_0 dont la largeur à mi-hauteur est $\Delta\omega = \omega_0/Q$.

Les paramètres caractéristiques d'un oscillateur sont donc :

- sa masse m ,
- sa fréquence de résonance $f_0 = \omega_0/(2\pi)$,
- le facteur de qualité (ou de surtension) Q .

Dans un problème réel de vibration, il s'agit rarement d'une masse accrochée à un ressort. Dans ce cas, les paramètres sont effectifs et il faut pouvoir calculer ceux-ci en fonction des paramètres réels.

1.2.2 Amortissement visqueux et amortissement interne

Dans la présentation ci-dessus, on a supposé que le paramètre de frottement f_d de l'équation 1.2 (dans l'espace des fréquences) est constant avec la fréquence. On reconnaît là un frottement visqueux. On peut supposer de façon plus générale que ce paramètre varie avec la fréquence.

Une manière de modéliser ce comportement [26, 27], lorsque les pertes sont très faibles, est d'ajouter à l'oscillateur non amorti une partie imaginaire à la constante de raideur, telle qu'elle apparaît dans l'équation 1.2 :

$$k \rightarrow k(1 + i\phi(\omega)) \approx ke^{i\phi} \quad (1.14)$$

$\phi(\omega)$ est appelé angle de pertes. Dans ce cas, il suffit de substituer dans l'expression de l'impédance 1.12

$$Q = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\phi} \quad (1.15)$$

A résonance, on a donc $Q = 1/\phi(\omega_0)$. Dans l'équation ci-dessus, on a écrit Q fonction de la fréquence ; rigoureusement, ce n'est pas la même quantité que le Q défini par la largeur à mi-hauteur de la raie de résonance. Si, dans l'espace des fréquences, Q (ou $\phi(\omega)$) varie en fonction de la fréquence, alors dans l'espace temporel les solutions écrites précédemment ne sont plus exactes ; en particulier, le ressort a un effet de mémoire [28].

La variable ϕ permet notamment de modéliser des pertes internes comme nous le verrons plus loin. Si plusieurs processus de dissipation sont présents, on additionnera la quantité $\phi(\omega)$ de chacun d'eux.

1.3 Le théorème fluctuation-dissipation

1.3.1 Énoncé

Le théorème fluctuation-dissipation [29] exprime le fait que lorsqu'un mouvement n'est pas conservatif, il existe une incertitude sur la mesure de la position, dû à l'équilibre thermique du système avec son environnement : c'est le bruit thermique.

Étant donnée l'impédance mécanique $Z(\omega)$ définie en 1.3, la densité spectrale du bruit de position est donnée par :

$$\tilde{x}^2(f) = 4k_B T \frac{1}{(2\pi f)^2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{Z(2\pi f)} \right] \quad (1.16)$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T la température en Kelvins, f la fréquence d'analyse. $\operatorname{Re}(x)$ désigne la partie réelle de x . Le résultat est exprimé en m^2/Hz .

La valeur moyenne quadratique de la position x est

$$\langle x^2 \rangle_{\text{rms}} = \int_0^\infty \tilde{x}^2(f) df \quad (1.17)$$

1.3.2 Cas de l'oscillateur harmonique

Dans le cas de l'oscillateur harmonique avec frottement visqueux, 1.16 devient :

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{\omega_0/m Q}{\frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (1.18)$$

Dans le cas de l'oscillateur harmonique avec amortissement interne,

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{\phi \omega_0^2/m\omega}{\omega_0^4 \phi^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (1.19)$$

Dans le cas du frottement visqueux, on peut vérifier qu'en intégrant 1.16, on obtient bien une énergie de $\frac{1}{2}k_B T$ par degré de liberté (on peut intégrer en utilisant par exemple le théorème des résidus) :

$$H_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2}m \int_0^\infty (2\pi f)^2 \tilde{x}^2 df = \frac{1}{2}k_B T \quad (1.20)$$

$$H_{\text{potentielle}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \int_0^\infty \tilde{x}^2 df = \frac{1}{2}k_B T \quad (1.21)$$

On remarque que dans le cas de l'amortissement interne, le calcul de l'énergie potentielle n'est pas possible, l'intégrale ne converge pas à l'origine. Il est donc physiquement impossible d'avoir un ϕ non nul en très basses fréquences : $\phi(\omega \rightarrow 0) = 0$.

Le comportement de $\tilde{x}^2(f)$ en fonction de la fréquence est, dans le cas de résonances aiguës ($Q \gg 1$ ou $\phi \ll 1$) :

domaine spectral	amortissement visqueux	amortissement interne
$\omega \ll \omega_0$	$4k_B T \frac{1}{mQ\omega_0^3}$	$4k_B T \frac{\phi}{m\omega_0^2\omega}$
$\omega = \omega_0$	$4k_B T \frac{Q}{m\omega_0^3}$	$4k_B T \frac{1}{\phi m\omega_0^3}$
$\omega \gg \omega_0$	$4k_B T \frac{\omega_0}{mQ\omega^4}$	$4k_B T \frac{\phi\omega_0^2}{m\omega^5}$

On voit immédiatement quels sont les paramètres à contrôler pour avoir un bruit thermique hors résonances le plus faible possible :

- la masse m de l'oscillateur doit être élevée
- le coefficient de surtension mécanique Q (ou $1/\phi$) doit être le plus élevé possible

1.4 Vibrations acoustiques dans les solides

Pour calculer le bruit thermique dans les solides, on représente chaque mode de vibration par un oscillateur harmonique. Pour calculer la contribution de chaque mode au bruit, il suffit d'exprimer les fréquences de résonance et les masses effectives en fonction de paramètres du solide (dimensions et paramètres mécaniques). Il reste ensuite à connaître les dissipations ; ce problème difficile sera abordé dans le paragraphe suivant.

Un solide (par exemple les miroirs de Virgo ou leurs fils de suspension) a des modes propres de résonance. Nous décrivons ici une approche permettant d'en comprendre l'origine et de calculer les fréquences de résonance et les masses effectives. Si on peut exprimer l'énergie d'un mode i en fonction d'une coordonnée $x(t)$, alors on peut trouver une masse équivalente M_i par :

$$E_i = M_i \omega_i^2 x_0^2 \quad (1.22)$$

où x_0 est l'amplitude de la vibration $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$.

1.4.1 Résonances dans un réseau cristallin

H.B. Callen, dans son livre « Thermodynamics » [30], propose une analogie permettant de comprendre quels sont les paramètres significatifs dans les problèmes d'équilibre thermodynamique. Cette approche décrit un système macroscopique par des atomes liés entre eux par des ressorts : on s'aperçoit alors que les modes de vibration collectifs sont des paramètres plus pertinents que les coordonnées de chacun des atomes. Une démarche du même genre est suivie ici.

Prenons l'exemple d'une chaîne linéaire de N atomes.

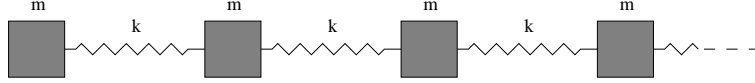


FIG. 1.2 – *Chaîne linéaire*

Le potentiel d'interaction entre deux voisins est, par exemple :

$$U_{i,i+1} = \frac{1}{2}k(u_i - u_{i+1})^2 \quad (1.23)$$

où u_i est le déplacement de l'atome u_i autour de sa position d'équilibre et k une constante de rappel.

L'énergie du système s'écrit

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2}m\omega_0^2(u_i - u_{i+1})^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m\dot{u}_i^2 \quad (1.24)$$

On a posé $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

On peut faire un changement de coordonnées

$$q_i = \sum_j a_{ij}u_j \quad (1.25)$$

tel que l'énergie s'écrit dans les nouvelles coordonnées :

$$H = \sum_i (\alpha_i q_i^2 + \beta_i \dot{q}_i^2) \quad (1.26)$$

où α_i et β_i sont des constantes.

La solution des équations de Hamilton-Jacobi de ce système donne des solutions harmoniques $q_i = q_{i0} \sin(\omega_i t + \phi)$.

Les variables q_i , modes propres de vibration du système considéré, sont donc plus pertinentes que les variables u_i . Pour N grand, les solutions avec $\omega \ll \omega_0$ correspondent

à des solutions du genre $q_{i0} \sin(\omega t) \sin(2\pi x/\lambda)$ où λ est de l'ordre de la longueur de la chaîne. La fréquence de résonance la plus basse est de l'ordre de c/L , L étant la dimension la plus grande du solide considéré [31].

Dans le cas d'un solide à trois dimensions, un raisonnement identique à celui qui vient d'être fait peut être conduit. Pour un solide monocristallin, il serait possible de prendre en compte des interactions entre voisins plus ou moins proches avec des constantes de couplage différentes. Pour un solide non monocristallin, il peut ne pas exister d'écriture générale pour l'énergie potentielle, mais il existe toujours un développement autour de la solution de repos en termes quadratiques $(u_i - u_j)^2$

$$H_{\text{pot}} = \sum_{\text{solide}} \alpha_{i,j} (u_i - u_j)^2 \quad (1.27)$$

Continuer l'étude dans cette direction n'est possible que si l'on est capable d'écrire l'expression de l'énergie en fonction des coordonnées des atomes, ce qui n'est en général pas le cas.

L'énergie 1.26 est quadratique en q_i et additive dans les différentes variables. Lorsqu'un tel système est à l'équilibre thermodynamique, on peut employer le théorème d'équipartition [32]. L'énergie de chaque degré de liberté est alors $\frac{1}{2}k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann et T la température.

1.4.2 Modèle continu unidimensionnel

La corde vibrante est l'extension à un milieu continu du problème précédent. Soit une corde sans raideur de longueur L , fixée à ses deux extrémités. La vitesse d'une onde le long de la corde est c . Une solution des équations du mouvement est

$$u_n = A \sin(2\pi x/\lambda) \sin(\omega t) \quad (1.28)$$

où $\lambda = 2L/n$ (n étant un entier), x est la coordonnée le long de la corde, u le déplacement le long de l'axe (Oy) du point d'abscisse x , $\omega = 2\pi c/\lambda$.

L'énergie du mode u_n est donc

$$H_n = \frac{1}{2} A^2 m_c \omega^2 \quad (1.29)$$

où m_c est la masse de la corde, et

$$\omega = n \frac{c\pi}{L} = n\omega_1 \quad (1.30)$$

1.29 devient alors

$$H_n = \frac{m_c c^2 \pi^2}{2L^2} A^2 n^2 \quad (1.31)$$

Si tous les modes ont la même énergie, leur amplitude A varie donc en $\frac{1}{n}$.

1.4.3 Acoustique des milieux continus

Dans un milieu solide isotrope à trois dimensions, les ondes acoustiques se propagent suivant la loi [33]

$$\rho \partial_t^2 \vec{u} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \vec{u}) \quad (1.32)$$

où \vec{u} représente le déplacement en chaque point du volume, λ, μ sont les coefficients de Lamé et ρ la densité du milieu. ∂_t représente la dérivée par rapport au temps, Δ est l'opérateur Laplacien.

En analyse harmonique $\vec{u} = e^{i\omega t} \vec{u}_i$, on trouve trois solutions de 1.32 indépendantes \vec{u}_i , une onde longitudinale \vec{u}_1 (i.e. telle que $\text{rot} \vec{u}_1 = 0$) et deux ondes transversales \vec{u}_2, \vec{u}_3 (i.e. telles que $\text{div} \vec{u}_2 = \text{div} \vec{u}_3 = 0$).

Les vitesses du son longitudinale et transversale sont telles que

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (1.33)$$

et

$$c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.34)$$

Des contraintes $\theta_{ij}(x, y, z)$ aux limites doivent aussi être vérifiées, par exemple pour un solide libre dans le vide, pour tout point (x, y, z) de la surface :

$$\theta_{uv}(x, y, z) = 0 \quad (1.35)$$

où u est une coordonnée suivant la normale de la surface et v une coordonnée soit suivant la normale, soit suivant une droite tangente à la surface. 1.35 est donc un ensemble de trois équations en chaque point de la surface.

La résolution explicite du système (1.32) et (1.35) est en général impossible. Supposons toutefois que la géométrie du problème nous le permette. Cette solution sera en général une superposition d'ondes longitudinales et transversales, et les conditions aux limites ne sont vérifiées que pour certaines fréquences f_i , qui sont donc les fréquences de résonance.

Supposons le déplacement $u(t, \vec{r})$ de chaque point du solide connu, on peut alors calculer le tenseur de déformation

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.36)$$

et donc l'énergie potentielle :

$$H_{\text{pot}} = \frac{\lambda}{2} \left(\sum_i E_{ii} \right)^2 + \mu \sum_{i,j} E_{ij}^2 \quad (1.37)$$

L'énergie cinétique a la même amplitude et est en quadrature ; on peut donc calculer l'énergie stockée en fonction du maximum d'amplitude par exemple. La masse effective du résonateur s'en déduit immédiatement.

Nous verrons plus tard l'application pratique de cette méthode au calcul du bruit thermique des substrats des miroirs.

1.5 Dissipations des ondes acoustiques dans les solides

Les pertes acoustiques dans les solides ont plusieurs causes. Certaines font intervenir des considérations sur la structure même du matériau, à l'échelle atomique : nature des liaisons atomiques, propagation de dislocations, frottements de grains dans les métaux, défauts de surface. D'autres utilisent la théorie de l'élasticité des solides continus : dissipation thermoélastique, adaptation d'impédance aux surfaces en contact. D'autres encore font intervenir des modèles globaux, comme pour les pertes de recul. Ces différentes hypothèses sur les processus de dissipation ne s'excluent pas les unes les autres ; un processus de dissipation peut être décrit par deux approches différentes. L'ensemble de ces explications n'est pas non plus forcément complet.

Une autre difficulté vient du fait qu'il n'est pas toujours possible de prédire théoriquement la valeur des dissipations pour chacun des processus, et donc de connaître celui qui est prépondérant. La thermoélasticité, par exemple, permet de donner une valeur inférieure pour l'angle de pertes ϕ ; la valeur réelle sera plus élevée.

Des tables de valeurs expérimentales existent, pour certains matériaux. Celles-ci sont souvent données pour des fréquences se situant dans les ultrasons, et pour des solides de formes différentes de celles qui nous intéressent dans Virgo (les processus dominants ne sont alors pas forcément les mêmes). Une approche empirique, utilisant des mesures, apporte donc un complément d'information. La variété des modèles présentés fait voir la difficulté à interpréter les résultats de mesure.

1.5.1 Une modélisation des dissipations : l'anélasticité

On se place dans le cas où l'amortissement d'un oscillateur est représenté par la variable ϕ . Si l'on exerce une force F sinusoïdale sur un tel ressort, son allongement $x(t)$ est retardé :

$$x(t) = \frac{1}{k} F(t - t_0) \quad \text{avec} \quad t_0 = \frac{\phi(\omega)}{\omega} \quad (1.38)$$

Physiquement, le retard t_0 ne peut pas diverger pour des fréquences infiniment basses ; on en déduit donc que pour $\omega \rightarrow 0$, $\phi(\omega) \sim \omega^n$ où $n \geq 1$. Il ne s'agit donc pas d'un comportement élastique normal, idéalement instantané : ce phénomène est nommé anélasticité.

Pour trouver le comportement général en fonction de la fréquence de ϕ , on suppose en général [26] un comportement parfaitement élastique suivi d'un processus de relaxation dû à un phénomène interne. La réponse x à une force F indicielle ($F = 0$ pour $t < 0$ et $F = F_0$ pour $t > 0$), sur un tel ressort (en pratique, une tige métallique en élongation par exemple), est donc

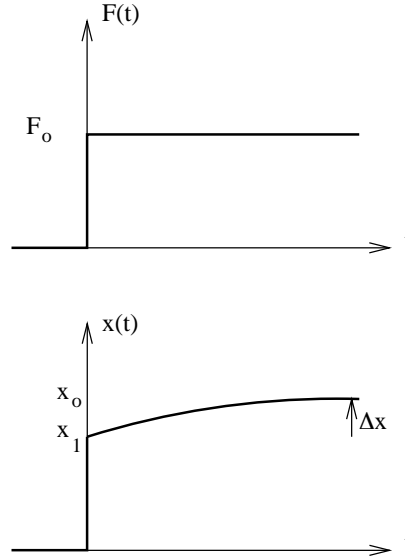


FIG. 1.3 – Réponse anélastique d'un ressort

Ce système est formellement équivalent à

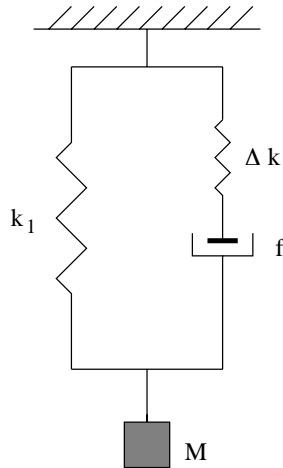


FIG. 1.4 – Modèle mécanique du comportement anélastique

La constante $k_1 = F_0/x_1$ est la constante élastique classique, $k_0 = F_0/x_0$ la constante qui est mesurée. L'allongement supplémentaire Δx est dû à la constante parasite Δk . La réponse indicielle peut s'écrire

$$x(t) = F_0 \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{\Delta k} (1 - e^{-t/\tau}) \right] \quad (1.39)$$

où $\tau = f/\Delta k$. Posons $\phi_0 = \Delta k/k_1$. La raideur effective du système est alors

$$k = k_1 \left(1 + \phi_0 \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \right) = k_1 \left(1 + \phi_0 \frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} + i\phi_0 \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right) \quad (1.40)$$

En général, $\phi_0 \ll 1$ (voir par exemple [34]). La raideur peut donc s'écrire $k(1 + i\phi)$ où

$$\phi(\omega) = \phi_0 \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (1.41)$$

Cette dépendance en fréquence est appelée « pic de Debye ».

La force de rappel d'un ressort anélastique agit, dans le domaine temporel, comme un effet de mémoire :

$$x(t) = - \int_{-\infty}^t F(\tau) y(t - \tau) d\tau \quad (1.42)$$

Si le ressort est parfaitement élastique, la compliance $y(\tau)$ est un pic de Dirac ; dans le cas anélastique, c'est la transformée inverse de Fourier de $\tilde{y}(\omega)$.

1.5.2 Dissipations thermoélastiques

Ce processus de dissipation, explicité par C. Zener en 1937, est dû aux effets couplés des déformations et des gradients de température. Lors d'une vibration, les zones dilatées du solide se refroidissent et les zones contractées se réchauffent. Le temps caractéristique pour que les températures s'égalisent entre deux régions séparées par plus d'une longueur d'onde est beaucoup plus long qu'une demi-période : l'effet n'est donc généralement perceptible. Cependant, pour certains types de vibration, la distance entre deux telles régions peut être beaucoup plus petite qu'une longueur d'onde. C'est le cas par exemple des vibrations transversales le long d'une corde. Si les températures parviennent à s'égaliser, on a une cause de pertes de l'énergie stockée dans la déformation [35, 36].

Dans le cas des vibrations transversales le long d'une corde, la distance entre les régions où s'établit un gradient de température est de l'ordre du diamètre du fil [37]. Dans le cas où le solide, amorphe, est constitué de cristallites entre lesquels la conductivité est faible, la distance à considérer est de l'ordre du diamètre de la cristallite. Toute imperfection dans la structure du solide va également provoquer des gradients de dilatation (et de contraintes), et donc des pertes par le phénomène décrit ici [33].

On a ici un phénomène typique d'anélasticité : une réponse instantanée suivie d'un processus de relaxation. Le comportement fréquentiel de l'angle de pertes sera donc, comme nous l'avons montré,

$$\phi = \phi_0 \frac{\nu \nu_0}{\nu^2 + \nu_0^2} \quad (1.43)$$

Le temps de relaxation (équilibre des températures) est de l'ordre de

$$\tau_{eq} = \frac{\rho C_m l^2}{K} \quad (1.44)$$

où ρ est la densité du matériau, C_m la capacité calorifique massique, K la conductivité thermique, l la distance entre les deux régions de températures différentes. La fréquence caractéristique de Debye ν_0 qui maximise l'effet thermoélastique est donc de l'ordre de grandeur de :

$$\nu_0 \sim \frac{K}{\rho C_m l^2} \quad (1.45)$$

Lorsque les fréquences sont plus petites que ν_0 , la déformation se fait de manière isotherme ; lorsqu'elles sont plus grandes que ν_0 , la déformation est adiabatique. C. Zener lie l'amplitude ϕ_0 au module d'Young E , au coefficient de dilatation α , à la température T :

$$\phi_0 = \frac{T \alpha^2 E}{\rho C_m} \quad (1.46)$$

Dans le cas où il s'agit d'une mauvaise conduction de la chaleur entre cristallites, on trouve une démonstration similaire, où l est la dimension d'une cristallite. On a alors [33]

$$\phi_0 \sim \frac{T \alpha^2 c^2}{C_m} \quad (1.47)$$

c la vitesse du son (il s'agit d'un ordre de grandeur, on ne distingue donc pas ondes transversales et longitudinales). Le comportement fréquentiel est en ν/ν_0 si $\nu \ll \nu_0$, en $\sqrt{\nu_0/\nu}$ si $\nu_0 \ll \nu \ll \nu_1$ ($\nu_1 = c/l$), et en ν/ν_1 si $\nu \gg \nu_1$.

Si des cristallites de différentes échelles se trouvent dans le bloc solide considéré, on aura une superposition d'effets tels que ceux décrits ci-dessus, et en particulier on peut obtenir un spectre basse fréquence continu.

Il est a priori possible de recuire le matériau pour augmenter la taille des cristallites et tendre vers un monocristal, et ainsi diminuer les pertes dues à la mauvaise thermalisation d'une cristallite à l'autre.

La conclusion de l'étude des pertes par thermoélasticité est que pour diminuer l'angle de pertes (et donc le bruit thermique) il faut, sinon diminuer la température, au moins choisir un matériau avec un faible coefficient de dilatation, une grande capacité calorifique et un petit module d'Young (ce qui est équivalent à choisir de grandes vitesses du son).

1.5.3 Dissipations par interaction phonon-phonon

L'équation 1.27 ne prend en compte que les termes d'ordre le plus bas dans la description de l'énergie potentielle. Avec les termes d'ordre plus élevé, le changement de coordonnées linéaire n'est plus possible. Les modes de vibration ne sont alors plus indépendants les uns des autres, et des transferts d'énergie vont s'effectuer des uns vers les autres : pour un mode considéré, il y a dissipation d'énergie.

Si le réseau est parfaitement linéaire, deux ondes acoustiques de fréquences f_1 et f_2 sont complètement indépendantes. Si des non-linéarités existent (i.e. des termes d'exposant d'ordre supérieur à 2 dans 1.27), une petite fraction de l'énergie va servir à créer de nouvelles ondes de fréquences $f_1 + f_2$ et $f_1 - f_2$. C'est l'effet « umklapp » [38, 39], qui provoque la diffusion Raman du son par le son. Ce processus permet d'évaluer un libre parcours moyen des phonons, qu'il reste à traduire en termes d'angle de pertes. Les études actuelles sur ces phénomènes se font dans le domaine des ultrasons [40].

1.5.4 Dissipations par interaction phonon-électron

Dans un métal parfaitement cristallin, les ondes acoustiques, en mettant le réseau ionique en mouvement, agitent également le gaz d'électrons. Ce gaz possède une viscosité, ce qui amène une dissipation du son [41]. L'angle de pertes par ce phénomène semble très faible.

1.5.5 Dissipations par propagation de dislocations

Dans un solide monocristallin, de nombreux défauts peuvent exister : places vacantes dans le réseau, impuretés, dislocations, désinclinaisons. Sous l'effet des contraintes apportées par une vibration, ou simplement sous l'effet de l'agitation thermique, les lignes de dislocation qui joignent les impuretés peuvent se déplacer de façon irréversible, ou bien vibrer [42]. Si le solide n'est pas cristallin mais amorphe, on peut regrouper ces phénomènes sous l'étiquette de réarrangements atomiques. Ceux-ci absorbent une partie de l'énergie acoustique d'une vibration.

La théorie de Granato-Lücke [42] prédit un angle de pertes dans la gamme des ultrasons :

$$\phi \propto \Omega L^4 \omega \quad (1.48)$$

où Ω est la densité de dislocations, L la longueur moyenne d'une dislocation et ω la pulsation. Dans la gamme basse fréquence, la vibration d'une ligne de dislocation de longueur L produit un pic de Debye. Comme le ϕ mesuré paraît plutôt constant avec la fréquence, on suppose une distribution continue des longueurs L façon à rendre compte du comportement expérimental.

Les théories sur la dissipation des ondes acoustiques par la propagation des dislocations sont donc encore inachevées. Dans l'état actuel, les formules font intervenir des paramètres

rarement accessibles (densité de dislocation, vecteur de Burger ...) ou des distributions arbitraires des temps de relaxation. Quoiqu'il en soit, les pertes dues aux dislocations sont toujours proportionnelles à la densité de dislocation ; celle-ci peut être réduite par recuit du matériau.

1.5.6 Dissipations par pertes de recul

Lorsqu'un élément mécanique de masse m_1 est en vibration (par exemple un fil tendu), il a tendance à mettre son support en mouvement. Le cas idéal est bien sûr celui où le support est infiniment rigide et fixe (grande inertie). Mais en général le support est flexible et sa masse n'est pas infinie ; sa vibration est donc une source de pertes pour l'énergie stockée dans l'oscillateur : on a affaire à des pertes de recul. Cette situation peut être modélisée par la figure 1.5.

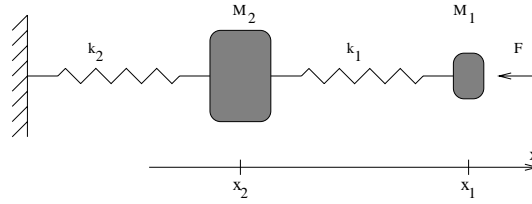


FIG. 1.5 – *Modèle pour les pertes de recul*

m_1 est la masse effective de l'oscillateur dont on veut limiter les pertes, m_2 la masse effective du support. Les constantes de raideur effectives k_1 et k_2 sont liées aux fréquences propres de vibration du support et de l'oscillateur

$$k_1 = m_1 \omega_1^2 \quad \text{et} \quad k_2 = m_2 \omega_2^2 \quad (1.49)$$

Pour tenir compte des pertes, on ajoute des parties imaginaires (ϕ_1 et ϕ_2) aux constantes de raideurs comme précédemment. On suppose ϕ_1 et ϕ_2 du même ordre de grandeur. On fait une analyse harmonique du rapport F/x_1 et on identifie sa partie imaginaire avec $m_1 \phi_{\text{eff}} \omega_1^2$, ce qui donne ϕ_{eff} , l'angle de pertes de recul.

Les deux équations du mouvement du système sont

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F - k_1(x_1 - x_2) \quad (1.50)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) - k_2 x_2 \quad (1.51)$$

et l'analyse harmonique donne, en posant $\nu = \omega/\omega_1$, $\nu_2 = \omega_2/\omega_1$ et $\mu = m_2/m_1$

$$-\frac{F}{x_1} = m_1 \omega_1^2 \left(-1 + \nu^2 - i\phi_1 + \frac{(1 + i\phi_1)^2}{\mu \nu_2^2 (1 + i\phi_2) + 1 + i\phi_1 - \mu \nu^2} \right) \quad (1.52)$$

On peut vérifier que l'angle de pertes effectif est

$$\phi_{\text{eff}} = \phi_1 + \phi_2 \frac{\nu_2^2}{\mu(\nu_2^2 - \nu^2)^2} \quad (1.53)$$

Si le matériau du support a un angle de pertes trop grand, et est de masse trop petite, l'angle de pertes est dégradé par les pertes de recul, que ce soit hors résonance ($\nu \neq 1$) ou à résonance ($\nu = 1$).

A résonance du support ($\nu \approx \nu_2$),

$$\phi_{\text{eff}} = \phi_1 + \frac{1}{\mu\nu_2^2\phi_2} \quad (1.54)$$

ϕ_{eff} peut être élevé. Dans une mesure de $\phi_{\text{eff}}(\omega)$, la résonance de la structure devient donc apparente.

1.5.7 Pertes par adaptation d'impédance

Dans le cas d'ondes acoustiques longitudinales dans un barreau, l'impédance s'écrit $Z = S\sqrt{\rho E}$, où S est la section [31]. Pour éviter un rayonnement des ondes acoustiques à l'interface de deux barreaux connectés par la section, il faudrait chercher des matériaux tels que les impédances soient très différentes l'une de l'autre.

Dans le cas de contacts de solides de formes quelconques, il faudrait pouvoir quantifier la part d'onde transversale et d'onde longitudinale en chaque point de l'interface, connaître l'angle d'incidence de chacune et en déduire le facteur de désadaptation d'impédance. Sauf configuration particulière, ce programme n'est pas réalisable. L'impédance est donc inconnue; mais un choix de matériaux tels que $\sqrt{\rho E}$ est très différent de part et d'autre de l'interface paraît pouvoir donner de bons résultats, à condition que l'angle de pertes de chacun reste petit.

Pour limiter le rayonnement des ondes acoustiques, il paraît judicieux de réduire les surfaces de contact. Par exemple, lors du contact d'un cylindre de longueur l avec un plan, la surface est donnée par l'équation [43]

$$S_{\text{contact}} = \sqrt{\frac{2Fl(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2}{\pi \cdot 1/d_1}} \quad (1.55)$$

où E_1 et ν_1 sont les modules d'Young et de Poisson du cylindre, E_2 et ν_2 ceux du solide plan et F la force avec laquelle l'un est pressé sur l'autre. Généralement le choix des matériaux ne permet pas une grande variation des modules d'Young; la réduction du rayon du cylindre minimise donc la surface de contact.

1.5.8 Dissipations par amortissement dans l'air

Lorsqu'un résonateur est dans l'air, des ondes acoustiques y sont générées qui emportent l'énergie acoustique stockée. Dans les conditions normales de pression, l'angle de pertes d'amortissement par l'air est

$$\phi = \frac{2P}{\pi\rho\nu} \sqrt{\frac{C_p\mu}{C_vRT}} \quad (1.56)$$

où P est la pression du gaz, μ sa masse moléculaire moyenne, ρ la densité du solide, ν la vitesse du son dans le solide. En atmosphère raréfiée, le libre parcours moyen des molécules de gaz est grand devant la longueur d'onde du son dans le gaz ; il faut alors utiliser, par exemple pour un cylindre de longueur L et de diamètre D

$$\phi = \frac{P}{\pi\rho\nu} \left(1 + \frac{L}{D}\right) \sqrt{\frac{8\mu}{\pi RT}} \quad (1.57)$$

Par exemple, pour un résonateur à quartz où $L = D$, si $P \approx 10^{-4}$ mbar, $\phi \approx 3.10^{-11}$. Pour d'autres matériaux, les constantes ρ et ν sont du même ordre de grandeur : un vide de 10^{-4} mbar suffit pour ne pas être sensible à cette source de pertes. Par contre, la mesure d'un angle de pertes petit ($\approx 5.10^{-4}$) n'est pas possible dans l'air.

1.5.9 Autres sources de pertes

D'autres sources de pertes sont possibles. Un mauvais poli des surfaces est supposé être une source probable de pertes. Des frottements des éléments solides aux points de contact amènent également des dissipations des ondes acoustiques sous forme de chaleur. Un choix adéquat d'espaceurs peut limiter ces effets.

En fait, les sources possibles sont tellement variées que dans une expérience il est très difficile d'identifier la source principale de pertes. Les tâtonnements sont délicats, d'une mesure à l'autre des éléments non maîtrisés peuvent varier.

Il semble intéressant de rappeler que le coefficient de qualité mécanique varie beaucoup avec la température. Spécialement dans les basses et très basses températures (de l'ordre du Kelvin), il devient particulièrement élevé [41]. Autour de 100 K, la courbe $\phi = f(T)$ présente un pic : c'est le pic de Bordoni. Celui-ci est apparemment dû aux dislocations. Par recuit du matériau, il peut presque complètement disparaître.

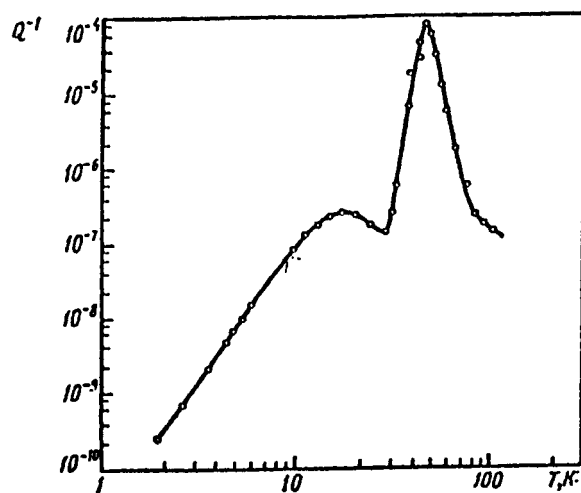


FIG. 1.6 – *Dépendance en température de Q^{-1} pour un résonateur à quartz à 1 MHz*

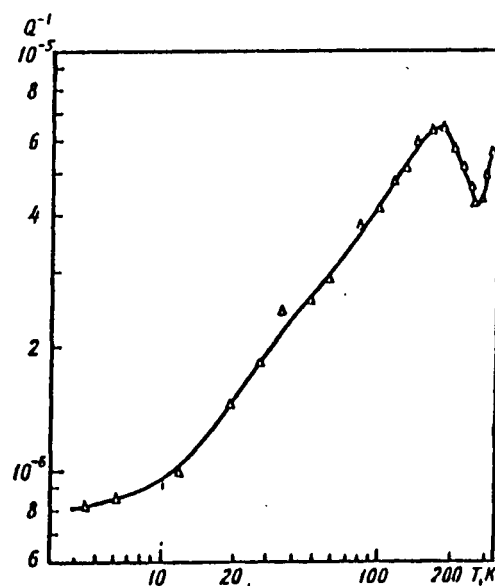


FIG. 1.7 – *Dépendance en température de Q^{-1} pour un résonateur aluminium à 20 kHz*

Dans des générations ultérieures d'antennes gravitationnelles interférométriques, il sera peut-être nécessaire de refroidir les masses suspendues pour gagner plusieurs ordres de grandeur en sensibilité.

1.5.10 Dissipations : conclusion

Les sources de pertes dans les matériaux sont nombreuses. Les expériences montrent qu'on a souvent, dans une gamme de fréquences de quelques Hz à quelques dizaines de kHz, un angle de pertes constant en fonction de la fréquence, qu'on peut supposer dû aux pertes par propagation de dislocations par exemple. Si le matériau présente une dimension petite devant la longueur d'onde acoustique (fil, membrane), les pertes thermoélastiques doivent aussi être prises en compte.

1.6 Première évaluation du bruit thermique

Les considérations effectuées jusqu'à présent permettent une première évaluation du bruit thermique dans Virgo, dans la gamme spectrale 10 Hz–5 kHz. Ce bruit est constitué par l'excitation thermique des modes de résonance des substrats des miroirs et de leurs suspensions.

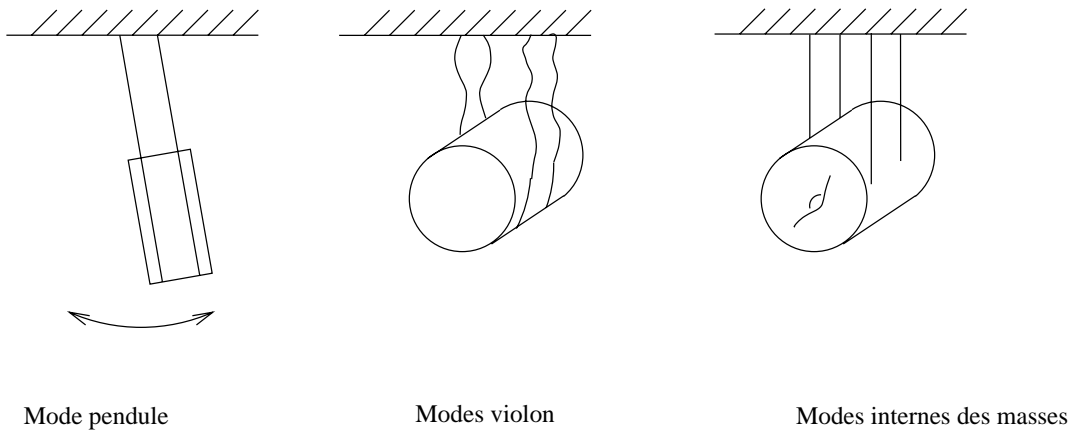


FIG. 1.8 – Sources de bruit thermique dans Virgo

Le mouvement pendulaire des masses, l'excitation des vibrations des fils de suspension et la vibration des modes internes des masses provoque un changement de distance entre les surfaces testées par le faisceau lumineux, et ce bruit de position simule une onde gravitationnelle :

$$\tilde{h}_n = 2\tilde{x}/L_c \quad (1.58)$$

L_c étant la longueur des cavités Fabry Perot. Les bruits étant indépendants, il faut sommer

quadratiquement les contributions de chacune des sources, pour chacun des miroirs :

$$\tilde{x}_{\text{total}}^2 = \sum_{\substack{4 \text{ miroirs} \\ \text{mode pendule} \\ \text{modes violon} \\ \text{modes internes}}} \tilde{x}^2 \quad (1.59)$$

Les deux chapitres suivants fournissent une étude plus détaillée du bruit thermique des fils et du bruit thermique des miroirs. Ici on ne tient pas compte du bruit thermique des modes violon, négligeable en dehors des résonances comme on le verra par la suite.

1.6.1 Bruit thermique pendulaire

On s'intéresse ici seulement au mouvement pendulaire des substrats des miroirs le long de l'axe de la cavité (axe Ox). On le modélise par un pendule simple :

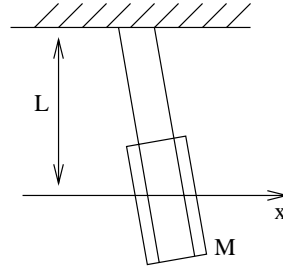


FIG. 1.9 – *Mouvement pendulaire du Substrat d'un miroir*

L'équation du mouvement est, si l'on ne tient pas compte des pertes :

$$ML_p\ddot{x} = -Mgx \quad (1.60)$$

où M est la masse suspendue, g est la constante d'accélération, L_p la longueur du pendule. La constante de raideur équivalente au schéma 1.1 est donc

$$k_p = \frac{Mg}{L_p} \quad (1.61)$$

et la fréquence de résonance

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (1.62)$$

Pour tenir compte des dissipations, on ajoute une partie imaginaire à la constante de raideur comme décrit précédemment ; on choisit un angle de pertes qu'on prend arbitrairement constant.

La longueur des fils est de 0,7 m ; la fréquence de résonance est alors $f_p = 0,6$ Hz. L'analyse spectrale dans Virgo se fait au-dessus de 10 Hz ; on est dans le cas $f \gg f_p$. Le bruit thermique d'un pendule est donc

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{\phi \omega_p^2}{M_m \omega^5} \quad (1.63)$$

où M_m est la masse du miroir considéré. Le bruit de position résultant du mouvement des quatre pendules sera donc (deux miroirs d'entrée et deux miroirs de fond)

$$\tilde{x}_{\text{tot}}^2 = \sum_{4 \text{ pendules}} \tilde{x}_{\text{un pendule}}^2 \quad (1.64)$$

où la masse vaut 42,2 kg pour les miroirs de fond et 21,1 kg pour les miroirs à l'entrée des cavités Fabry Perot. Pour une application numérique, on prend arbitrairement $\phi = 10^{-6}$, $4k_B T = 1,66 \cdot 10^{-20}$ J. D'où

$$\tilde{x}_{\text{tot}} = 5,8 \cdot 10^{-18} \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^{5/2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (1.65)$$

et la sensibilité spectrale en h

$$\tilde{h}_n = 3,9 \cdot 10^{-21} \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^{5/2} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (1.66)$$

1.6.2 Bruit thermique des miroirs

Pour une première évaluation du bruit thermique des miroirs, on utilise la formule 1.16 en donnant à la masse M la moitié de la valeur de la masse physique du miroir comme le suggère P. Saulson [27], et en donnant à la fréquence de résonance la valeur de la première fréquence de résonance à symétrie cylindrique (5,7 kHz pour le miroir d'entrée des cavités Fabry Perot, 7,85 kHz pour le miroir de fond). On se situe donc dans le cas où $f^2 \ll f_0^2$ et

$$\tilde{x}_{\text{tot}}^2 = 2 \times 2 \times \frac{4k_B T}{\omega} \left(\frac{\phi}{M_{m,e} \omega_{0,e}^2} + \frac{\phi}{M_{m,r} \omega_{0,f}^2} \right) \quad (1.67)$$

où un facteur 2 est dû au nombre de miroirs (deux miroirs d'entrée, deux miroirs de fond) et un autre à l'estimation de la masse effective. D'où, en prenant arbitrairement $\phi(\omega) = \text{cste} = 10^{-6}$

$$\tilde{x} = 2,2 \cdot 10^{-20} \left(\frac{1000 \text{ Hz}}{f} \right)^{1/2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (1.68)$$

et la sensibilité spectrale en h

$$\tilde{h}_n = 1,48 \cdot 10^{-23} \left(\frac{1000 \text{ Hz}}{f} \right)^{1/2} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (1.69)$$

1.6.3 Bruit thermique dans l'interféromètre Virgo

En reprenant les approximations précédentes, la densité spectrale de bruit thermique limitant la sensibilité de Virgo est :

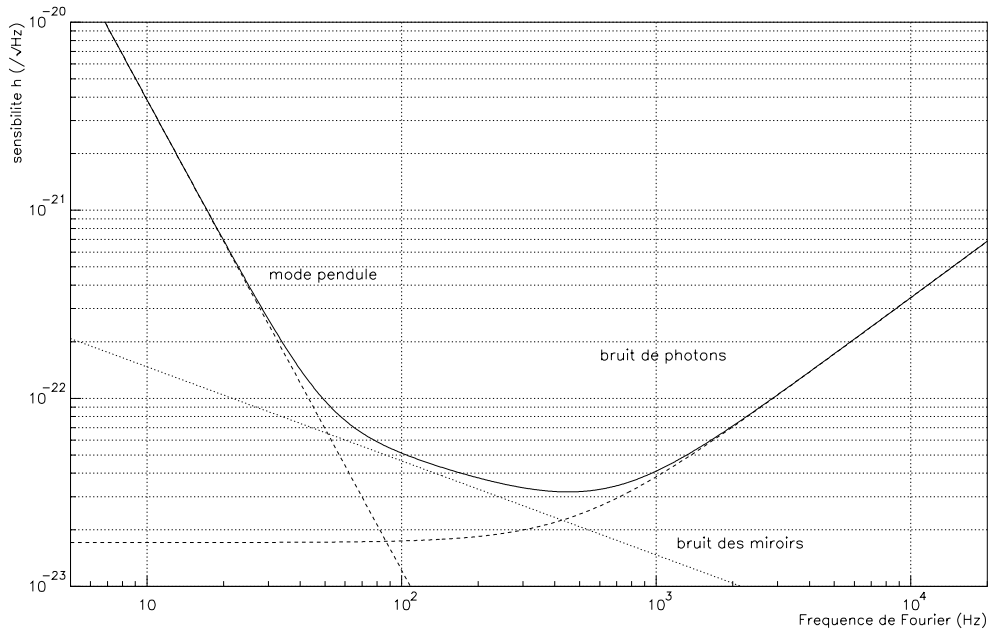


FIG. 1.10 – *Première estimation de la sensibilité de Virgo*

On a ajouté le bruit de photons tel que calculé au deuxième chapitre de la première partie.

1.7 Mesure de faibles pertes

Les équations développées en 1.2 suggèrent trois façons de mesurer des coefficients de qualité élevés.

- mesure à résonance du temps de relaxation de la réponse impulsionnelle ;
- mesure spectrale de la largeur à mi-hauteur de la résonance en réponse à un bruit blanc
- mesure du retard de phase, hors résonance, à une excitation harmonique.

La première méthode utilise l'équation 1.5. La mesure de ω_0 est aisée. On détecte également l'enveloppe $Ae^{-t/\tau}$, et soit en utilisant deux points sur la courbe, soit en ajustant les paramètres, on mesure τ . On en déduit donc $Q = \omega_0\tau/2$. L'inconvénient de cette méthode est le temps de mesure relativement long : pour une mesure sur une durée de longueur de l'ordre de τ , il faut de l'ordre de 15 minutes pour mesurer un Q de $3 \cdot 10^5$ à 100 Hz et il faudrait de l'ordre de 2 heures 30 min pour mesurer un Q seulement 10 fois plus grand à la même fréquence.

La deuxième méthode de mesure utilise l'équation 1.13. La largeur de spectre Δf à mesurer est de l'ordre de f_0/Q , donc de l'ordre du mHz pour un coefficient de qualité de 10^5 à 100 Hz et 10^{-4} Hz si Q vaut 10^6 . Un analyseur de spectre faisant une analyse en bande étroite devra donc intégrer pendant des temps du même ordre de grandeur que ci-dessus pour mesurer des Q élevés.

La troisième méthode est de faire une mesure hors-résonance. On utilise alors l'équation 1.38. La difficulté est alors double. Elle est d'abord de mesurer de très petits retards de phase, ce qui demande de bien contrôler les temps de propagation des signaux. Elle vient surtout du fait que la valeur de la constante de raideur est élevée, et donc pour des excitations ayant des ordres de grandeur raisonnables, il est difficile sinon impossible de faire sortir le déplacement du bruit de fond.

1.8 Conclusion

Il est difficile, particulièrement dans une situation expérimentale, de choisir entre les nombreux modèles de dissipation. De plus, les mesures n'étant faites qu'à résonance, la dépendance de l'angle de pertes avec la fréquence reste hypothétique. La maîtrise de l'angle de pertes est donc délicate. Elle est pourtant cruciale par ses conséquences sur la sensibilité définitive de l'antenne, sur le nombre d'événements annuels observables et sur les développements de l'astrophysique qui s'ensuivent.

Chapitre 2

Bruit thermique des fils de suspension

On traite ici du bruit de longueur des cavités Fabry Perot dû au mouvement pendulaire des substrats des miroirs ainsi qu'aux modes violon de leurs suspensions. On se limite aux mouvements dans l'axe des cavités optiques ; les mouvements dus au bruit thermique dans les autres directions sont négligeables (cf. [21]).

2.1 Bruit thermique pendulaire

Le bruit thermique pendulaire, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, s'exprime par (pour des fréquences supérieures à la fréquence de pendulation) :

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{\phi_p \omega_p^2}{M_m \omega^5} \quad (2.1)$$

M_m étant la masse d'un miroir. Il reste donc à déterminer ϕ_p en fonction des pertes internes au fil.

Le mouvement pendulaire est déterminé par deux forces : la force de gravitation et une force due à la raideur du fil. L'équation du mouvement de la masse suspendue est alors

$$M_m \ddot{x} = -k_p x - n k_i x \quad (2.2)$$

où x est la position du miroir dans l'axe du faisceau, $k_p = M_m g / L_p$ est la constante de rappel due à la gravitation et k_i la constante de rappel due à la raideur d'un fil tendu ($n = 4$ fils suspendent le miroir) :

$$k_i = \sqrt{T_0 E I} / 2 L_p^2 \quad (2.3)$$

où T_0 est la tension d'un fil, (un quart du poids de la masse suspendue puisqu'il y a 4 fils de suspension), E le module d'Young du matériau et I le moment d'inertie de la section

$I = \int r^2 dx dy$, r étant la distance à l'axe par rapport auquel se fait le mouvement ; pour un cylindre, $I = \pi R^4/4$, où R est le rayon du fil. Pour les sections de fils de suspension que l'on considère, $k_i \ll k_p$.

La force de rappel gravitationnelle $k_p x$ n'est pas dissipative ; la force de rappel due à la raideur du fil fait intervenir un angle de pertes interne au matériau du fil $\phi_w : k_i \rightarrow k_i(1 + i\phi_w)$. L'équation 2.2 devient alors, en analyse spectrale

$$M_m \omega^2 \tilde{x} = -k(1 + i\phi_p) \tilde{x} \quad (2.4)$$

où $k \approx k_p$, $\phi_p = \phi_w k_i / k_p$. L'angle de pertes du mouvement pendulaire ϕ_p s'exprime donc en fonction de l'angle de pertes du matériau de la suspension par [27]

$$\phi_p(\omega) = \phi_w(\omega) \frac{1}{2L_p} \sqrt{\frac{EI}{T_0}} \quad (2.5)$$

Si on choisit la section du fil de manière à être à une fraction ξ de la limite élastique R_e ,

$$\phi_p(\omega) = \phi_w(\omega) \frac{1}{2L_p} \sqrt{\frac{ES}{4\xi\pi R_e}} \quad (2.6)$$

La solution de référence de Virgo comporte des fils de suspension en acier (« cordes à piano ») ; ceux supportant les miroirs d'entrée de 21,2 kg ont un diamètre de 280 μm et ceux supportant les miroirs de fond de 42,4 kg ont un diamètre de 400 μm . Pour des fils d'acier, le module d'Young est de 210 GPa et la limite élastique 1,7 GPa ; le diamètre est calculé de façon à ce que chaque fil soit à 50 % de sa limite élastique. On trouve alors que si les pertes internes ϕ_w sont constantes et égales à 10^{-3} , le mode pendule a un angle de pertes de $7,83 \cdot 10^{-7}$ pour les miroirs d'entrée et de $1,107 \cdot 10^{-6}$ pour les miroirs de fond.

Le bruit thermique pendulaire est alors

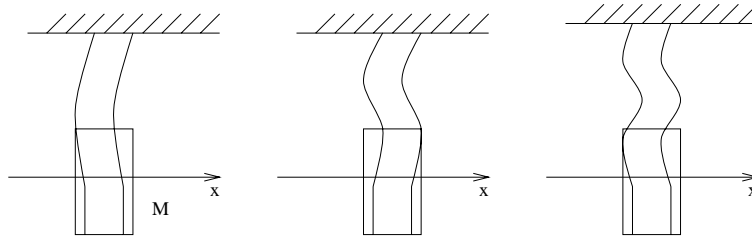
$$\tilde{x}_{\text{tot}} = 5,47 \cdot 10^{-18} \left(\frac{10\text{Hz}}{f} \right)^{5/2} \text{ m} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.7)$$

et la sensibilité spectrale en h

$$\tilde{h}_n = 3,65 \cdot 10^{-21} \left(\frac{10\text{Hz}}{f} \right)^{5/2} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.8)$$

2.2 Bruit thermique des modes violon

Chaque fil de suspension des blocs cylindriques vibre selon ses modes propres ; cette vibration est excitée par le bruit thermique. Ces modes sont appelés « modes violon ». La masse suspendue est mise en mouvement par ces vibrations.

FIG. 2.1 – *Différents modes de résonance des suspensions*

Pour calculer le bruit thermique des modes violon, on identifie chaque résonance à un oscillateur à pertes. Le bruit thermique s'écrit alors sous forme de série [27, 44]

$$\tilde{x}^2 = \frac{4k_B T}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n \omega_n^2}{\mu_n [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \phi_n^2 \omega_n^4]} \quad (2.9)$$

où ω_n est la pulsation du n^{e} mode violon et μ_n sa masse effective. On doit sommer sur les 4 fils de suspension. On néglige la raideur dans le calcul des fréquences de résonance (ce qui est justifié pour un fil fin tendu). Les fréquences de résonance sont alors multiples d'un fondamental

$$f_n = n f_1 = n \frac{1}{2L_p} \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}} \quad (2.10)$$

où T_0 est la tension d'un fil, ρ sa densité et S sa section.

La masse équivalente de chaque mode, comme on le démontrera avec le modèle à constantes réparties, vaut

$$\mu_n = \frac{M_m}{2} \frac{\omega_n^2}{\omega_p^2} \quad (2.11)$$

où $\omega_n \gg \omega_p$, ω_p étant la pulsation du mode pendule.

On suppose que $\phi_n(\omega)$ est, à une fréquence donnée, identique pour chaque mode $\phi_n = \phi_v$, ce qui peut être vrai par exemple si il s'agit de pertes internes indépendantes de la géométrie de la vibration. On démontrera par ailleurs dans le paragraphe 2.3.6 que l'angle de pertes des modes violon est double de l'angle de pertes du mode pendule

$$\phi_v = 2\phi_p. \quad (2.12)$$

Pour approximer le bruit en dehors des fréquences de résonance, on somme le bruit des deux modes violon les plus proches ω_n et ω_{n+1} et on cherche la contribution à la fréquence $(\omega_n + \omega_{n+1})/2$. On trouve alors un bruit hors résonance des modes violon, pour les quatre fils de suspension d'un miroir, égal à

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{16\phi_v(\omega)\omega_p^2}{M\omega^3\omega_1^2} \quad \text{pour } f > f_1 \quad (2.13)$$

où ω_1 est la pulsation du premier mode violon. Ce résultat peut aussi s'écrire, en exprimant ω_p et ω_1 en fonction des caractéristiques du fil,

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{64}{\pi^2} \frac{\phi_v(\omega) m_f}{M^2 \omega^3} \quad \text{pour } f > f_1 \quad (2.14)$$

où m_f est la masse du fil. D'où, pour l'ensemble de l'interféromètre, un bruit des modes violon hors résonance

$$\tilde{x} = 4, 2 \cdot 10^{-20} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{3/2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.15)$$

et la sensibilité spectrale en h

$$\tilde{h}_n = 2, 3 \cdot 10^{-23} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right)^{3/2} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.16)$$

Le bruit hors résonance des modes violon est en-dessous du bruit des modes internes du miroir. On ne s'en soucie donc pas ; on cherche seulement à diminuer le nombre de pics de résonance (de largeur très petite puisque le coefficient de qualité est élevé). Pour diminuer le nombre de pics parasites dans le spectre de sensibilité de l'interféromètre, on a intérêt à avoir le fil le plus fin possible.

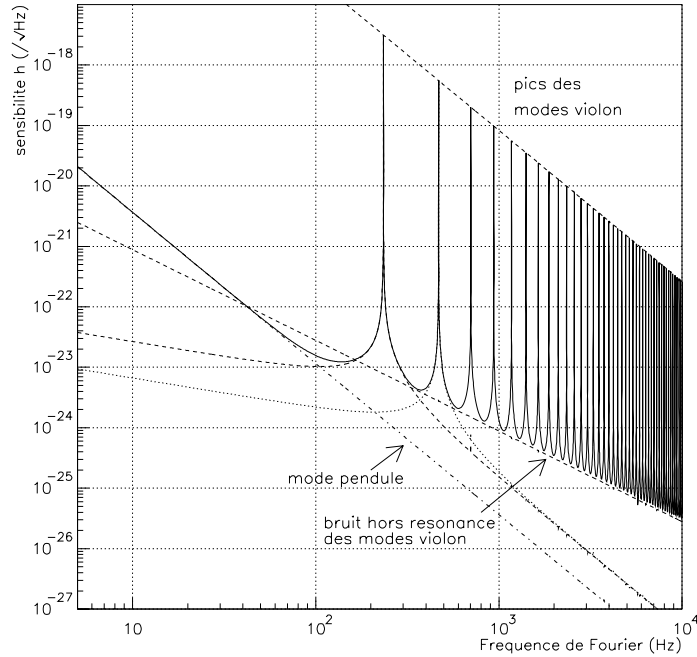
On obtient, pour $f < f_1$,

$$\tilde{x}^2 = \frac{4k_B T}{\omega} \frac{8\phi_v \omega_p^2}{M\omega_1^4} \sum_{n=1} \frac{1}{n^4} \quad (2.17)$$

En utilisant $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$, on a

$$\tilde{x}^2 = \frac{4k_B T}{\omega} \frac{64}{45} \frac{\phi_v m_f^2}{M^3 \omega_p^2} \quad (2.18)$$

Dans ces conditions, avec les données employées pour la construction de Virgo [21], la sensibilité de l'interféromètre limitée par le bruit thermique des fils est celle de la figure 2.2.

FIG. 2.2 – *Bruit thermique des fils - Modèle avec série de résonateurs*

Sur la figure, les deux lignes droites donnent l'amplitude du sommet des pics des modes violon et le bruit des modes violon en dehors des résonances. La courbe en trait continu figure la somme des bruits pendulaire et des modes violon. Les courbes en pointillés représentent la contribution du pendule seul et celle des deux premiers modes violon. Le bruit des modes violon hors résonance est légèrement sous-estimé, car l'approximation du bruit par la somme des deux modes violon les plus proches est insuffisante ; le facteur exact de correction apparaît dans le paragraphe suivant.

2.3 Modèle à constantes réparties

Je me propose de montrer ici un modèle simple, utilisant des résultats déjà connus pour les lignes électriques hyperfréquences. Il permet le calcul du bruit thermique du mode pendule et des modes violon simultanément. Ne sont considérées que les ondes acoustiques transversales le long des fils de suspension, et seuls les déplacements dans la direction de la cavité optique sont pris en compte. La masse suspendue est supposée ponctuelle.

2.3.1 Équations de propagation

La propagation d'ondes transversales le long d'un fil dont on néglige la raideur est régie par les équations [31]

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

$$T = -T_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.20)$$

ρ désigne la densité volumique du fil, S sa section, $\xi(x, t)$ le déplacement transversal d'un point situé à l'abscisse x du fil, $T_0 + T(x, t)$ est la tension du fil au point x . T_0 est la tension constante du fil ; dans le cas des suspensions de Virgo, T_0 est le poids du substrat divisé par le nombre de fils de suspension. En notant $v(x, t) = \partial \xi / \partial t$, il vient immédiatement

$$\rho S \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

donc $v(x, t)$, de même que $T(x, t)$ et $\xi(x, t)$, obéit à l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (2.23)$$

où c_t est la vitesse de propagation des ondes transversales,

$$c_t^2 = \frac{T_0}{\rho S} \quad (2.24)$$

La raideur du fil a été négligée ; l'équation de propagation qui en tient compte devient [45]

$$T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} \quad (2.25)$$

avec $I = (\pi/4)r^4$, r étant le rayon du fil. On vérifie sur le résultat final que le deuxième terme du membre de droite est négligeable dans la gamme de fréquence intéressante pour Virgo. Un développement complet tenant compte de la raideur a été effectué dans l'article [46].

Les conditions aux limites sont :

à l'extrémité fixe du fil ($x = 0$),

$$\xi(0, t) = v(0, t) = 0 \quad (2.26)$$

à l'extrémité où est accrochée la masse M ($x = L$),

$$M \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = f(t) \quad (2.27)$$

où $f(t)$ est la force appliquée sur la masse.

2.3.2 Analogie avec des lignes électriques

Les équations 2.22 sont formellement identiques à l'élément de ligne

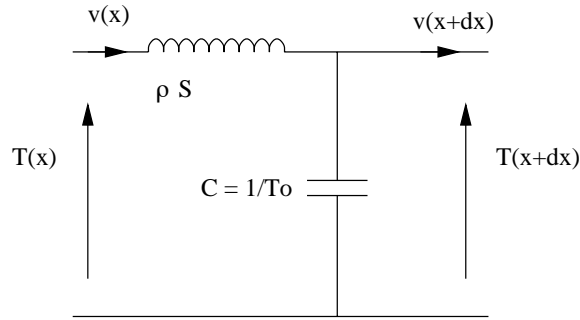


FIG. 2.3 – *Analogie électrique formelle des équations de propagation*

Ces équations sont également équivalentes mécaniquement à une série d'oscillateurs

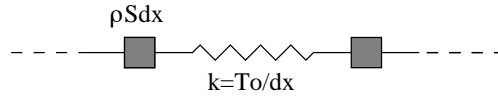


FIG. 2.4 – *Schéma mécanique équivalent*

L'analogie électrique permet d'utiliser immédiatement tous les résultats connus sur les lignes hyperfréquences.

2.3.3 Résolution des équations de propagation

La solution générale des équations 2.22, quelles que soient les conditions aux limites, s'écrit

$$T(x, t) = F_1(c_t t - x) + F_2(c_t t + x) \quad (2.28)$$

$$v(x, t) = \frac{1}{R_c} [F_1(c_t t - x) - F_2(c_t t + x)] \quad (2.29)$$

F_1 et F_2 sont deux fonctions quelconques et l'impédance caractéristique R_c est définie par

$$R_c = \sqrt{\rho S T_0} \quad (2.30)$$

En faisant une analyse harmonique des solutions,

$$T(x, t) = e^{i\omega t} [T_1 e^{-\gamma x} + T_2 e^{\gamma x}] \quad (2.31)$$

$$v(x, t) = \frac{e^{i\omega t}}{R_c} [T_1 e^{-\gamma x} - T_2 e^{\gamma x}] \quad (2.32)$$

où T_1 et T_2 sont deux nombres complexes, et

$$\gamma = i\beta = i \frac{\omega}{c_t} \quad (2.33)$$

En posant le coefficient de réflexion $\rho(x) = \frac{T_2}{T_1} e^{2\gamma x} = \rho(x=0) e^{2\gamma x}$, les grandeurs T et v s'écrivent aussi

$$T(x, t) = e^{i\omega t} e^{-\gamma x} [1 + \rho(x)] \quad (2.34)$$

$$v(x, t) = \frac{e^{i\omega t}}{R_c} e^{-\gamma x} [1 - \rho(x)] \quad (2.35)$$

L'impédance au point x se définit par

$$Z(\omega, x) = \frac{T(\omega, x)}{v(\omega, x)} = R_c \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)} = R_c z(\omega, x) \quad (2.36)$$

$z(\omega, x)$ est l'impédance réduite au point x . Si z_0 est l'impédance réduite à l'origine, au point x on aura

$$z_x = \frac{z_0 - \tanh(\gamma x)}{1 - z_0 \tanh(\gamma x)} \quad (2.37)$$

De la condition à la limite $x = 0$ que l'on a exprimée découle $\rho(0) = 1$ donc $Z_0 = \infty$. L'équation établie en $x = L$ permet de poser

$$T_L = i\omega M v_L - f(\omega) \quad (2.38)$$

Le système global se modélise donc par

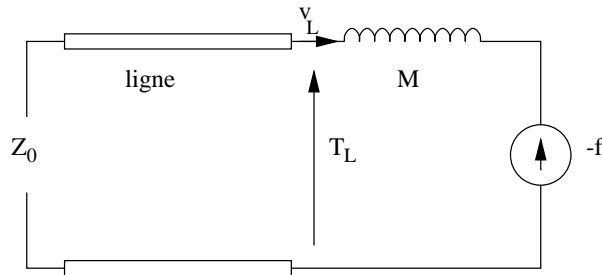


FIG. 2.5 – Analogie électrique des suspensions

Si le fil a une longueur L , comme il y a quatre fils connectés à la masse suspendue, la force f voit une impédance mécanique

$$Z_M = iM\omega + 4 \frac{R_c}{\tanh(\gamma L)} \quad (2.39)$$

2.3.4 Fréquences de résonance

La valeur de l'impédance 2.39 nous permet de calculer le mouvement de la masse M lorsqu'on applique une force f

$$\xi_L = f_0 \frac{1}{-M\omega^2 + \frac{4T_0\omega}{c_t \tan(\beta L)}} \quad (2.40)$$

Le dénominateur s'annule pour

$$\tan(\beta L) = \frac{4T_0}{c_t M\omega} \quad (2.41)$$

Pour le mouvement du mode pendule, $\beta L \ll 1$, on trouve donc la fréquence de résonance

$$\omega_p = \sqrt{g/L} \quad (2.42)$$

Les autres fréquences f_n vérifiant l'équation 2.41 sont telles que $\tan(\beta L) \approx 0$, soit

$$f_n = n f_1 \quad \text{avec} \quad f_1 = \frac{c_t}{2L} \quad (2.43)$$

La modélisation par constantes réparties permet de calculer au passage la masse équivalente des modes violon dans un modèle où on développe les résonances en série d'oscillateurs mécaniques. Le rapport ξ_L/f_o (équation 2.40) vaut approximativement

$$\frac{\xi_L}{f_o} = \sum_{n=0} \frac{1}{\mu_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (2.44)$$

où

$$\mu_n = \frac{M}{2} \left(1 + \frac{\omega_n^2}{\omega_p^2} \right) \quad (2.45)$$

$$\omega_0 = \omega_p \quad (2.46)$$

$$\omega_n = n \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}} \quad (2.47)$$

μ_n est la masse équivalente du mode violon n .

Le développement 2.9 en série de résonateurs est donc valide, même en dehors des fréquences de résonance.

2.3.5 Pertes acoustiques

Le modèle décrit jusqu'à présent ne contient pas de pertes. On peut cependant compléter le modèle.

Les pertes au point de contact des suspensions avec le support ($x = 0$) se modélisent facilement en prenant la charge en bout de ligne Z_0 non infinie. On posera $Z_0 = R$ par exemple pour simuler un frottement au point de contact.

Pour simuler des pertes internes, on ajoute comme d'habitude une partie imaginaire à la constante de raideur k du schéma 2.4, ce qui revient sur le schéma électrique à multiplier le terme $1/C$ du circuit électrique équivalent par $1 + i\phi$. on obtient alors le circuit équivalent

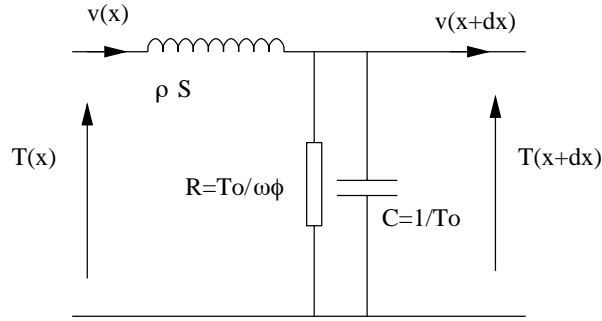


FIG. 2.6 – *Analogie électrique avec pertes*

On est dans le cas général d'impédances quelconques

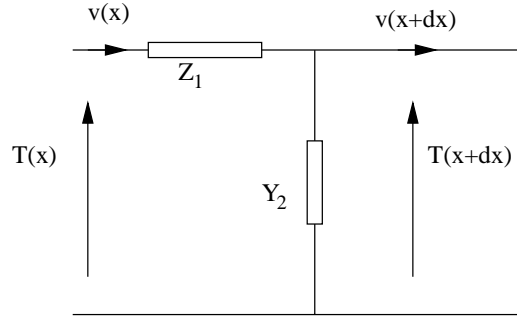


FIG. 2.7 – *Élément de ligne avec pertes*

Il a fallu poser

$$Z_1 = i\rho S\omega \quad (2.48)$$

$$Y_2 = \frac{i\omega}{T_0(1 + i\phi)} \quad (2.49)$$

Le paramètre γ prend donc la nouvelle valeur

$$\gamma = \sqrt{Z_1 Y_2} = \alpha + i\beta \quad (2.50)$$

où $\beta = \omega/c_t$ et $\alpha \approx \beta\phi/2$. L'impédance caractéristique $R_c = \sqrt{Z_1/Y_2}$ ne change pas de valeur au premier ordre ($\phi \ll 1$).

L'impédance vue par la force f vaut donc

$$Z_M = 4R_c \alpha L \frac{1 + \tan^2(\beta L)}{\alpha^2 L^2 + \tan^2(\beta L)} + i \left(M\omega - 4R_c \frac{\tan(\beta L) (1 - \alpha^2 L^2)}{\alpha^2 L^2 + \tan^2(\beta L)} \right) \quad (2.51)$$

2.3.6 Bruit thermique

L'impédance mécanique étant connue, le bruit thermique est calculable. On suppose ϕ constant avec la fréquence.

Pour $\omega_p < \omega < 2\pi f_1$, on trouve le bruit du mode pendule pour la suspension d'un miroir

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{(\phi/2) \omega_p^2}{M\omega^5} \quad (2.52)$$

En comparant avec l'équation 2.1, on voit que l'angle de pertes ϕ introduit dans ce modèle est lié à l'angle de pertes du mouvement pendulaire ϕ_p

$$\phi = 2\phi_p \quad (2.53)$$

Pour $f > f_1$, en dehors des résonances des modes violon, on trouve un bruit thermique

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{8m_f \phi}{M^2 \omega^3} \quad (2.54)$$

Dans l'équation 2.14, le bruit hors résonance ne tenait compte que des deux modes violon les plus proches, et était légèrement sous-estimé. En fait, comme on peut le voir ici, il aurait fallu remplacer le facteur $64/\pi^2$ par 8. L'angle de pertes de notre modèle étant celui des modes violon (il définit la largeur à mi-hauteur des pics), il vient

$$\phi_v(\omega) = 2\phi_p(\omega) \quad (2.55)$$

2.4 Choix du matériau

Deux solutions sont possibles pour le choix du matériau. La première est d'optimiser le facteur de renforcement $K = \frac{\phi_p}{\phi_w}$, où ϕ_p est l'angle de pertes associé au mode pendule et ϕ_w

l'angle de pertes internes au matériau, en admettant que ϕ_w est plus ou moins identique dans tous les matériaux, indépendant de la fréquence et de l'ordre de 10^{-3} .

L'alternative est de minimiser les pertes thermoélastiques. Cela est équivalent à choisir la fréquence ν_0 du pic de Debye hors de la bande de fréquences où le bruit pendulaire domine, et à minimiser le facteur $K\phi_0$, où

$$\phi_0 = \frac{T\alpha^2 c^2}{C_m} \quad (2.56)$$

où c^2 représente la vitesse du son des ondes transversales, $c^2 = T_0/\rho S$. La fréquence de Debye se calcule par

$$\nu_0 = 0,539 \frac{K}{\rho C_m (d/2)^2} \quad (2.57)$$

où d est le diamètre du fil. En fait, les mesures existantes semblent montrer que ϕ_w est indépendant de la fréquence [47, 48], de l'ordre de ϕ_0 [49]. C'est donc le facteur $K\phi_0$ qu'on optimise.

Pour déterminer la section, on choisit la plus petite possible dans des limites raisonnables de sécurité, c'est-à-dire que la contrainte maximale se trouve à 50 % de la limite élastique (indépendamment de ce qui peut exister en catalogue). Les calculs sont effectués pour les suspensions des miroirs d'entrée.

Les données se trouvent résumées dans le tableau suivant, où ρ est la densité du matériau (en kg.m^{-3}), E le module d'Young (en GPa), Re la limite élastique (en MPa), C_m la capacité calorifique massique (en J.kg^{-1}), α le coefficient de dilatation thermique ($\times 10^{-6}$), d le diamètre du fil (en micromètres), ϕ_0 les pertes thermoélastiques ($\times 10^{-6}$) à la fréquence de Debye, $K = \phi_p/\phi_w$ ($\times 10^{-3}$) le coefficient entre les pertes du mode pendule et les pertes internes du matériau et enfin $K\phi_0$ ($\times 10^{-6}$) les pertes si $\phi_w = \text{constante} = \phi_0$. Les caractéristiques des matériaux sont issues du catalogue [50].

Matériau	ρ	E	Re	C_m	α	d	ϕ_0	K	$K\phi_0$
Tungstène dur	19300	410	1380	133	4,50	310	970	1,35	1,31
Corde à piano	7850	210	1700	400	18	279	6500	0,783	5,09
Saphir	3980	379	280	753	5,8	688	1280	6,39	8,15
Quartz	2200	70	48	700	0,54	1660	3,98	16,0	0,0637
Silice fondue	2202	730	50	750	0,54	1630	3,87	15,7	0,0607
Cu98/Be2	8250	120	500	420	17	515	3000	2,01	6,04
Nickel	8900	206	490	460	12	520	2170	2,69	5,85
316 L	7930	190	860	400	17	392	5190	1,47	7,65
304 L	7930	190	176	400	17	867	5190	7,20	37,4
Cuivre	8960	250	250	385	17	728	3260	4,19	13,7
Niobium dur	8570	550	550	268	7,2	491	711	1,71	1,22

Il apparaît immédiatement que si les pertes internes sont à un niveau constant de l'ordre de 10^{-3} , la corde à piano est le meilleur choix, et l'angle de pertes qu'on peut attendre alors est de $\phi_p = 7,8 \cdot 10^{-6}$ pour la suspension des miroirs d'entrée. Si les pertes internes sont de l'ordre des pertes thermoélastiques, alors le meilleur choix est une suspension en silice ou en quartz : les chiffres pour ces matériaux sont intéressants en raison de leur faible coefficient de dilatation. En fait, pour le quartz, la limite élastique ne peut pas être atteinte, il y a des lésions de surface pour des tensions plus faibles, et donc la section qui apparaît ici n'est pas réaliste [21].

2.5 Mesures de matériaux

M. Pham-Tu et moi-même avons mené à Orsay une campagne de mesure des coefficients de qualité des modes violon d'un fil tendu [49]. De la mesure de l'angle de pertes des modes violon peut se déduire l'angle de pertes du mode pendule, moyennant certaines hypothèses sur la dépendance en fréquence de cet angle de pertes.

2.5.1 Dispositif expérimental

Implantation mécanique

Le fil à tester est tendu entre deux étaux. Ces étaux, dont on peut faire varier la position angulaire, sont solidaires d'une structure massive en aluminium formant un portique. Il est possible d'insérer des espaceurs cylindriques dans les mâchoires de l'étau, pour tester l'influence de l'espaceur et de son orientation sur l'angle de pertes (voir figure 2.8).

La tension du fil est réglable entre 1 et 10 kg au moyen d'un dynamomètre.

L'ensemble de la structure se situe dans une enceinte à vide où la pression résiduelle est d'environ 10^{-5} mbar.

Les vibrations du fil tendu sont excitées par une petite tige collée sur la membrane d'un haut-parleur. Lorsque la tension alternative aux bornes du haut-parleur est suffisante (de l'ordre de 1 V), la tige vient frapper le fil. Si la fréquence d'excitation est voisine d'une fréquence de résonance du fil, la vibration de celui-ci devient visible à l'œil nu (de l'ordre de la fraction de mm). Lorsque l'excitation est brusquement interrompue, l'oscillation s'atténue lentement jusqu'à la position de repos.

Dispositif de mesure

Le dispositif de détection est constitué d'un laser de 1 mW et d'une photodiode en regard, chacun situé à l'extérieur de l'enceinte, en face d'un hublot. Ces éléments sont montés sur une table x-y qui permet un positionnement fin. Il est aisé de montrer que la lumière reçue

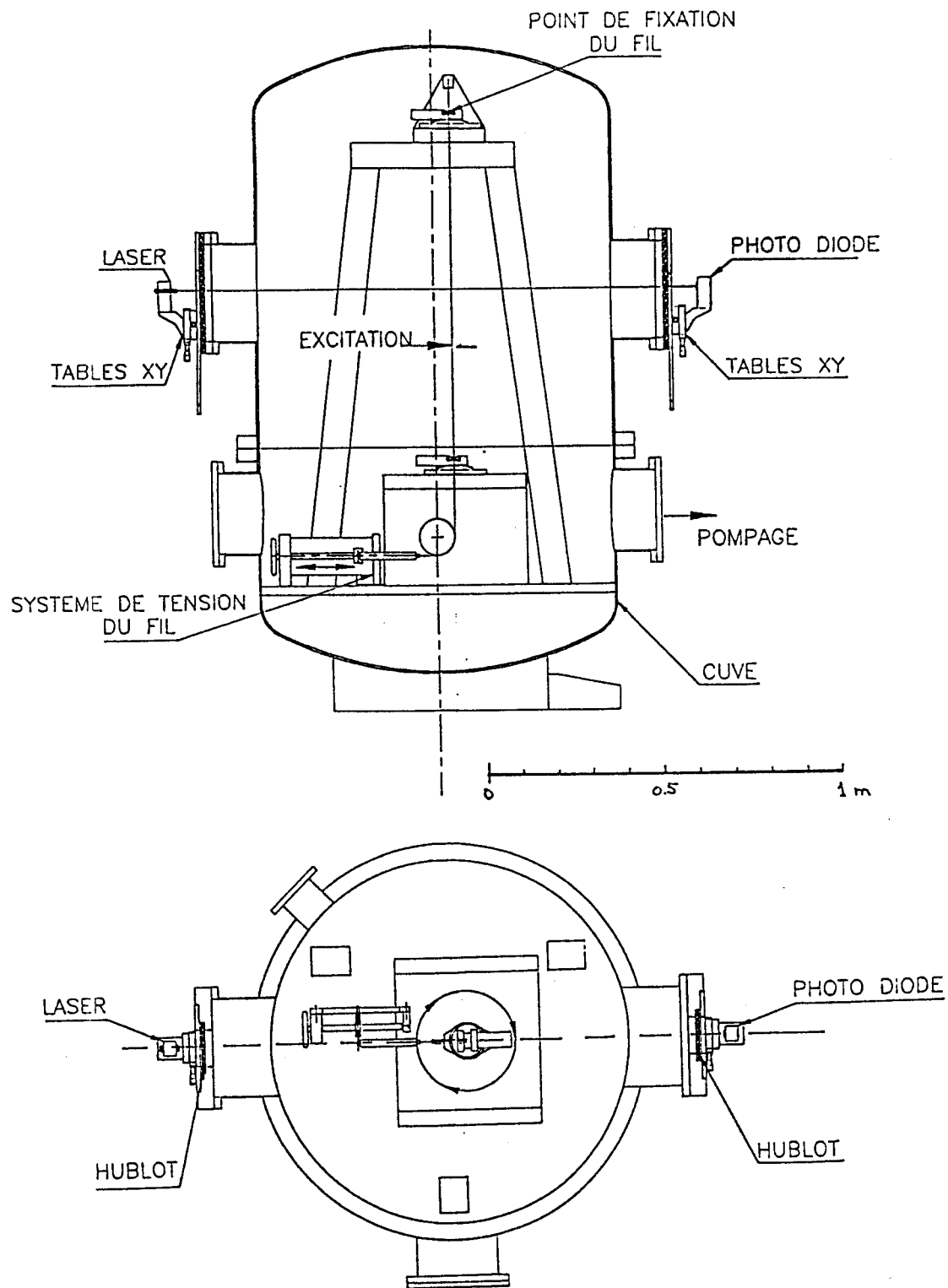


FIG. 2.8 – Dispositif expérimental de mesure des coefficients de qualité des fils

varie avec

$$P = P_{\max} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0 + R}{w_0/\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0 - R}{w_0/\sqrt{2}} \right) \right] + P_{\text{offset}} \quad (2.58)$$

où x est la variation de coordonnée du fil, x_0 une abscisse absolue, lue sur un vernier, P_{\max} la puissance émise par le laser et P_{offset} un décalage des tensions dû au courant d'obscurité de la photodiode et à la lumière ambiante résiduelle. La fonction erf est définie par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (2.59)$$

L'expérience permet de vérifier cette formule et d'estimer la valeur des différents paramètres (figure 2.9).

Lors d'une excitation sinusoïdale, le signal est amplifié à l'aide d'un amplificateur bas bruit, filtré par un amplificateur sélectif pour éliminer le bruit hors de la fréquence de mesure (figure 2.10).

Un analyseur de spectre permet la mesure précise de la fréquence de résonance. Il permet également de constater si la résonance est dégénérée ou non. Pour la mesure du temps de relaxation, le signal est redressé puis filtré, ce qui permet de ne conserver que l'enveloppe. Un oscilloscope et un micro-ordinateur font l'acquisition du signal; un programme d'ajustement de courbe exponentielle permet alors le calcul du temps de relaxation.

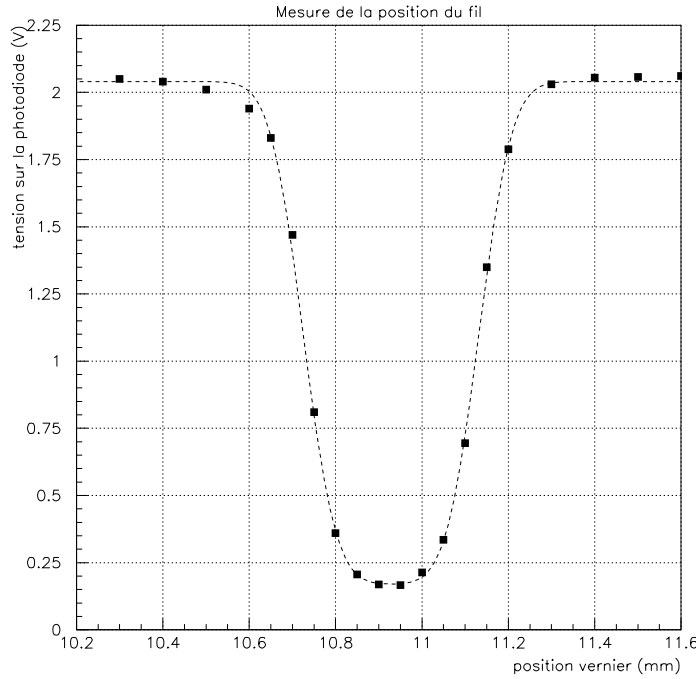
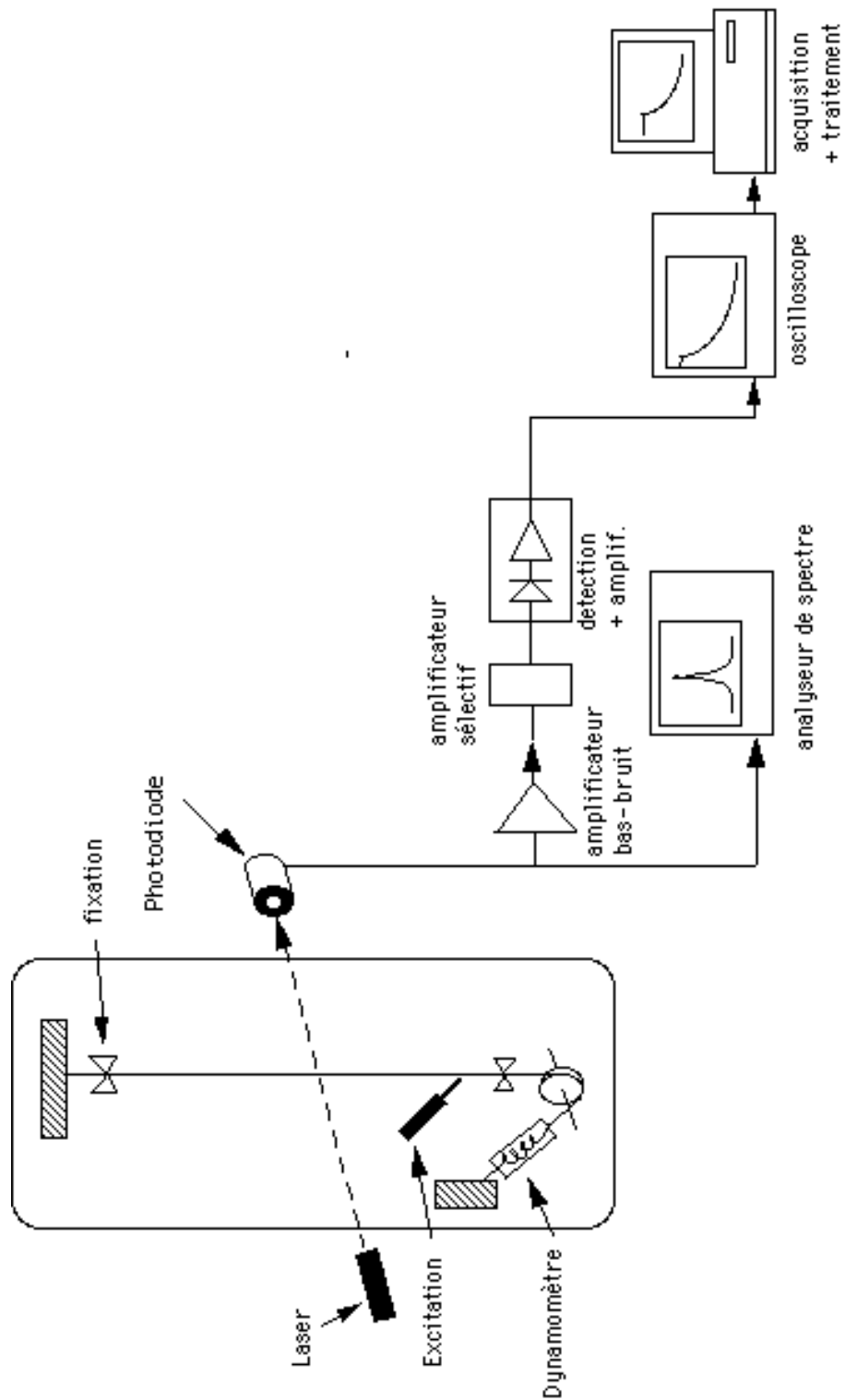
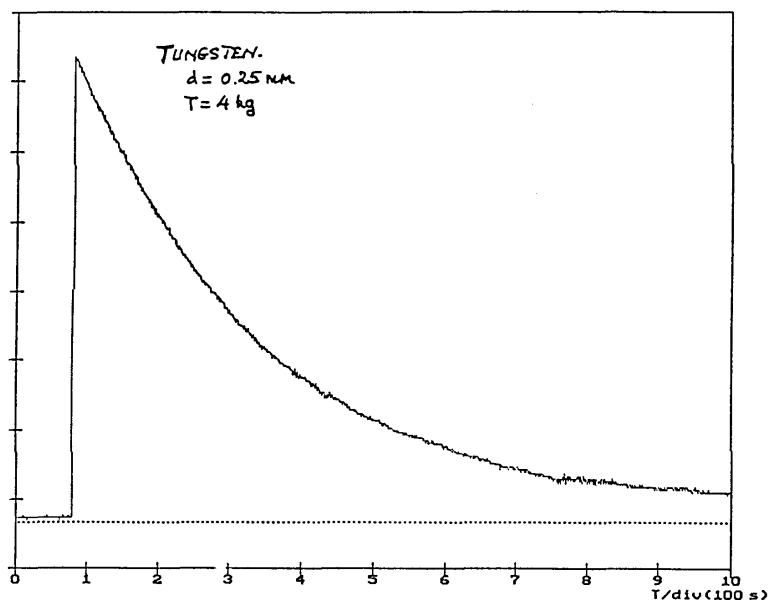
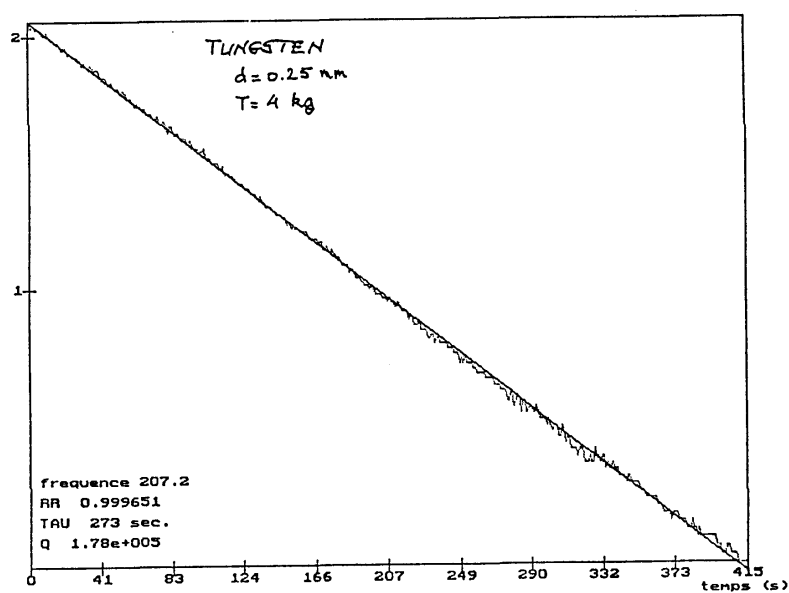


FIG. 2.9 – *Caractéristique du système de mesure du mouvement du fil*

FIG. 2.10 – *Détection des résonances du fil*

FIG. 2.11 – *Détection de la relaxation*FIG. 2.12 – *Estimation des paramètres de la décroissance*

Pour cette expérience, le fil est une corde à piano (acier) de $400\ \mu\text{m}$ de diamètre (ce que l'on retrouve par la largeur à mi-hauteur de la courbe). Un ajustement des paramètres permet de déduire que le faisceau a une largeur de $w = 134\ \mu\text{m}$ sur le fil, le faisceau laser incident induit une tension de 1,8 V en l'absence de fil, la position du vernier où un maximum de lumière est cachée par le fil est $x_0 = 10,9\ \text{mm}$ et la tension d'écart est 0,17 V. Le maximum de sensibilité aux vibrations du fil est obtenu lorsque le fil cache la moitié de la lumière du faisceau incident, c'est-à-dire lorsque la tension continue sur la photodiode est de l'ordre de 1 V. La réponse est alors quasiment linéaire, et le système de détection a une dynamique de 11,2 V/mm.

Les courbes recueillies après redressement et filtrage ont bien la forme d'une exponentielle décroissante, comme le montre la figure 2.11 prise pour un fil de tungstène de diamètre $250\ \mu\text{m}$, tendu par une force d'environ 40 N.

Une échelle logarithmique en axe vertical (amplitude de l'oscillation) permet de vérifier la loi exponentielle de décroissance et permet l'estimation des différents paramètres (par exemple, pour la même mesure que ci-dessus, cf. la figure 2.12).

Chaque mesure est répétée plusieurs fois ; l'erreur sur le résultat est variable, suivant le fil étudié ; elle est de l'ordre de 5 %, avec une valeur extrême de 50 %. Lorsque l'incertitude sur la mesure est grande, c'est que la résonance est dégénérée et deux vibrations voisines sont excitées. Le signal, après détection, est alors ondulé, ce qui affecte beaucoup la valeur de l'angle de perte calculé.

2.5.2 Influence des espaceurs

Deux types d'«espaceurs», cales introduites dans les mâchoires des étaux, ont été essayés. Les premiers sont des cylindres d'acier, les seconds des plaques. Les résultats ne montrent pas d'influence évidente du type d'espaceur sur le résultat de la mesure, pour les mesures sur une corde à piano de diamètre $400\ \mu\text{m}$ (figure 2.13). Chaque mesure de coefficient d'angle de pertes du mode violon ϕ_v est convertie en angle de pertes internes du fil ϕ_w . La courbe des pertes thermoélastiques est inscrite à titre de référence.

2.5.3 Influence de la tension du fil

La tension du fil ne paraît pas beaucoup influencer l'angle de pertes internes. L'exemple d'un fil de tungstène est résumé par le graphique 2.14. Sur cette courbe, les coefficients de qualité mesurés sont convertis en pertes internes ϕ_w . La courbe de dissipation thermoélastique est imprimée pour référence.

Les pertes internes sont de l'ordre de 10^{-3} , et ne semblent pas dépendre de la fréquence.

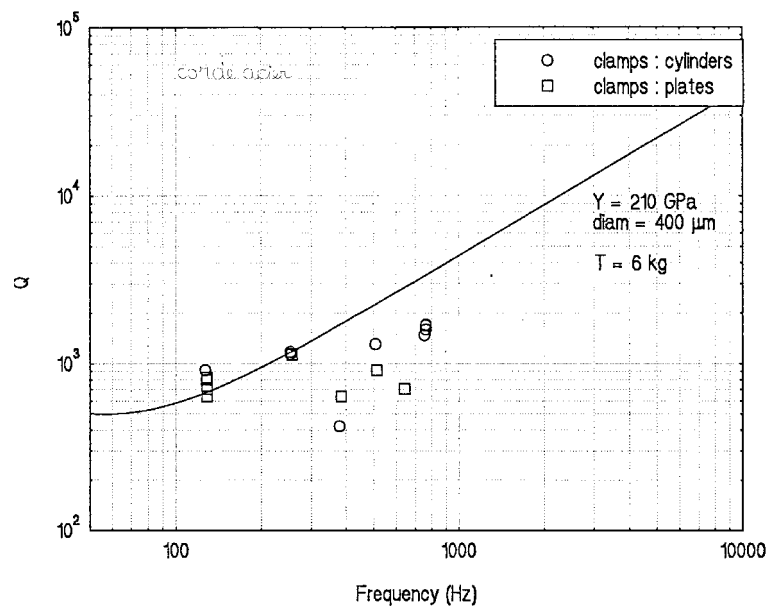
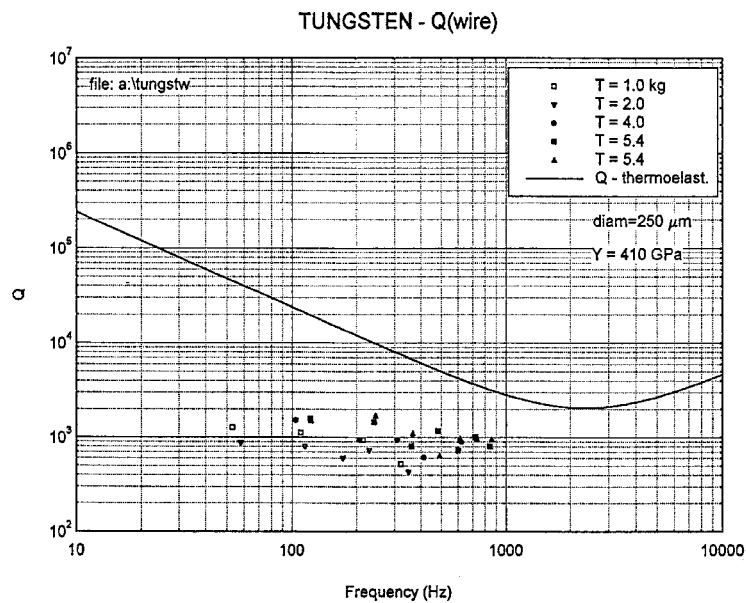


FIG. 2.13 – Influence des espaceurs sur l'angle de pertes

FIG. 2.14 – Q en fonction de la tension du fil

2.5.4 Comparaison aux pertes thermoélastiques

Pour certains matériaux, les résultats sont très proches des pertes thermoélastiques. Par exemple, pour un fil cuivre-béryllium, les pertes sont celles de la thermoélasticité lorsque celles-ci sont élevées (fréquences au-dessus de 200 Hz, figure 2.15).

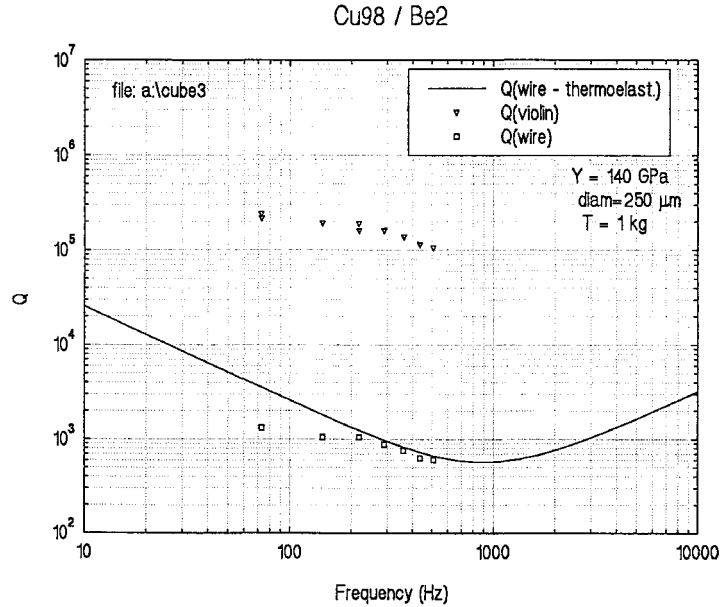


FIG. 2.15 – Q d'un fil cuivre-béryllium

2.5.5 Pertes internes pour différents matériaux

Pour chaque matériau, on donne le diamètre du fil (en microns), la fréquence du pic de Debye, le facteur $K = \phi_p/\phi_w$, la tension du fil (en kg). La longueur du fil tendu entre les étaux est d'environ 0,94 m.

Pour chaque mesure, on donne le numéro de l'harmonique, sa fréquence, le nombre de mesures effectuées, le coefficient de qualité du mode violon mesuré et le coefficient ϕ_w qui en est déduit. Lorsque plus de 3 mesures ont été faites, l'écart type est calculé.

Corde à piano

Le fil a un diamètre de $400\ \mu\text{m}$, le pic de Debye est à $\nu_0 = 57\ \text{Hz}$, le facteur K vaut 7.10^{-3} , la tension est de $6\ \text{kg}$.

n	f_i	N	$Q_v(\times 10^5)$	$\phi_w(\times 10^{-3})$
1	127	5	$1,01 \pm 0,05$	$1,4 \pm 0,07$
2	253	2	1,67	0,86
3	380	3	$0,36 \pm 0,2$	$4,0 \pm 2$
4	507	2	1,85	0,77
6	762	7	$0,66 \pm 0,06$	$0,66 \pm 0,06$

Aux alentours de la fréquence de Debye, les pertes thermoélastiques dominent.

Tungstène dur

Le fil a un diamètre de $250\ \mu\text{m}$, le pic de Debye est à $\nu_0 = 2330\ \text{Hz}$, le facteur K vaut $4,06.10^{-3}$, la tension est de $5,4\ \text{kg}$.

n	f_i	N	$Q_v(\times 10^5)$	$\phi_w(\times 10^{-3})$
1	122	5	$3,4 \pm 0,23$	$0,72 \pm 0,04$
2	245	7	$4,0 \pm 0,16$	$0,61 \pm 0,02$
3	367	6	$0,79 \pm 0,17$	$3,11 \pm 0,7$
3'	366	4	$2,52 \pm 0,15$	$0,98 \pm 0,06$
4	490	1	1,56	1,58
5	612	1	2,4	1,02
6	735	1	2,35	1,05
7	857	1	2,34	1,05

Cuivre-Béryllium

Le fil a un diamètre de $250\ \mu\text{m}$, le pic de Debye est à $\nu_0 = 1000\ \text{Hz}$, le facteur K vaut $5,51.10^{-3}$, la tension est de $1\ \text{kg}$.

n	f_i	N	$Q_v(\times 10^5)$	$\phi_w(\times 10^{-3})$
1	73	2	2,29	0,8
2	245	7	$1,55 \pm 0,3$	$1,2 \pm 0,2$
3	218	2	$1,76 \pm 0,2$	$1,03 \pm 0,1$
4	290	1	1,6	1,1
5	363	1	1,4	1,3
6	436	1	1,1	1,7
7	508	1	1,1	1,7

Nickel-Chrome

Le fil a un diamètre de 250 μm , le pic de Debye est à $\nu_0 = 110$ Hz, le facteur K vaut $3,67 \cdot 10^{-3}$, la tension est de 3 kg.

n	f_i	N	$Q_v(\times 10^5)$	$\phi_w(\times 10^{-3})$
1	136	2	1,3	2,1
2	271	3	$2,13 \pm 0,07$	$1,28 \pm 0,04$
3	408	3	$0,57 \pm 0,03$	$4,8 \pm 0,3$
4	544	4	$1,18 \pm 0,44$	$2,3 \pm 0,9$
5	678	4	$2,89 \pm 0,37$	$0,94 \pm 0,12$
6	814	2	3,6	0,76
7	950	2	3,9	0,7

Niobium écroui

Le fil a un diamètre de 250 μm , le pic de Debye est à $\nu_0 = 805$ Hz, le facteur K vaut $4,36 \cdot 10^{-3}$, la tension est de 1,2 kg.

n	f_i	N	$Q_v(\times 10^5)$	$\phi_w(\times 10^{-3})$
1	87	7	$4,27 \pm 0,45$	$0,54 \pm 0,05$
2	175	2	4,45	0,51
3	262	2	4,25	0,54
4	350	2	3,9	0,59
5	437	2	2,6	0,88
6	526	2	2,3	1,0
8	701	1	2,71	0,85
9	789	1	2,34	0,9

Titane Ti90/Al6/V4

Le fil a un diamètre de 250 μm , le pic de Debye est à $\nu_0 = 400$ Hz, le facteur K vaut $3,46 \cdot 10^{-3}$, la tension est de 2 kg.

n	f_i	N	$Q_v(\times 10^5)$	$\phi_w(\times 10^{-3})$
1	160	2	3,1	0,93
2	319	3	$3,3 \pm 0,05$	$0,9 \pm 0,02$
3	478	3	$1,45 \pm 0,02$	$2,00 \pm 0,03$
4	637	1	2,14	1,35
5	798	2	2,1	1,38

Tungstène Rhénium

Le fil a un diamètre de 200 μm , le pic de Debye est à $\nu_0 = 3565$ Hz, le facteur K vaut $4,81 \cdot 10^{-3}$, la tension est de 2 kg.

n	f_i	N	$Q_v(\times 10^5)$	$\phi_w(\times 10^{-3})$
1	188	5	$5,7 \pm 0,5$	$0,42 \pm 0,04$
2	376	3	$2,6 \pm 0,13$	$0,91 \pm 0,04$
3	564	2	3,4	0,7
5	940	2	1,74	1,37
6	1128	3	$3 \pm 0,05$	$0,8 \pm 0,02$
7	1317	3	$3,67 \pm 0,16$	$0,77 \pm 0,04$

Saphir

Le fil a un diamètre de 110 μm , le pic de Debye est à $\nu_0 = 2500$ Hz, le facteur K vaut $2,08 \cdot 10^{-3}$, la tension est de 650 g.

n	f_i	N	$Q_v(\times 10^5)$	$\phi_w(\times 10^{-3})$
1	222	2	0,4	12
2	444	3	$5,7 \pm 0,2$	$0,85 \pm 0,03$
3	665	4	$4,8 \pm 0,2$	$1,00 \pm 0,04$
4	888	2	4,4	1,1

Les pertes mesurées pour le saphir sont beaucoup moins intéressantes que ce à quoi on pouvait s'attendre. Peut-être ici n'est on pas sensible aux pertes internes mais à des pertes de frottement aux points de contact.

2.5.6 Choix du matériau

Les mesures précédentes semblent montrer que les pertes internes $\phi_w(\omega)$ sont constantes sauf si l'on est au voisinage de la fréquence de Debye où les pertes thermoélastiques dominant (comme par exemple pour la « corde à piano »).

Le choix d'un matériau pour le fil prend donc en compte :

- Un facteur de pertes internes ϕ_w faible et une fréquence de Debye suffisamment élevée, au-dessus de la bande de fréquence où le bruit pendulaire domine, par exemple $\nu_0 > 500$ Hz.
- Un facteur $K = \phi_p/\phi_w$ suffisamment faible.

Le premier repère permet de retenir, parmi les matériaux mesurés, le tungstène et le tungstène-rhénium parce que leur fréquence de Debye est particulièrement élevée (grande conductivité thermique et faible capacité calorifique), et le niobium parce que ses pertes internes sont particulièrement faibles. Le deuxième repère retient la corde à piano dont le facteur K paraît intéressant. Pour ces quatre derniers matériaux, on suppose ϕ_w constant, égal à ce qui a été mesuré pour les premiers modes. L'angle de pertes du mode pendule est alors, pour des suspensions pouvant supporter les miroirs d'entrée de Virgo

Matériau	ϕ_w	K	ϕ_p
Tungstène	7.10^{-4}	$1,35.10^{-3}$	$9,5.10^{-7}$
Tungstène-rhénium	4.10^{-4}	$1,35.10^{-3}$	$5,4.10^{-7}$
Niobium	$5,5.10^{-4}$	$1,71.10^{-3}$	$9,4.10^{-7}$
Corde à piano	9.10^{-4}	$7,83.10^{-4}$	$7,0.10^{-7}$

La différence finale entre les différents matériaux n'est pas très importante. La valeur pour la corde à piano est trop optimiste : sa fréquence de Debye est basse (141 Hz), on est sensible aux pertes thermoélastiques. En fait, la comparaison entre le modèle de pertes constantes $\phi_w = 10^{-3}$ et un modèle où les pertes sont la somme quadratique de ces pertes constantes et des pertes thermoélastiques montre que la différence n'est pas très sensible (cf. figure 2.16).

Le Tungstène-Rhénium semble meilleur. Cependant, comme la première fréquence de mode violon est aussi plus basse, le gain réel en sensibilité n'est pas très important (figure 2.17).

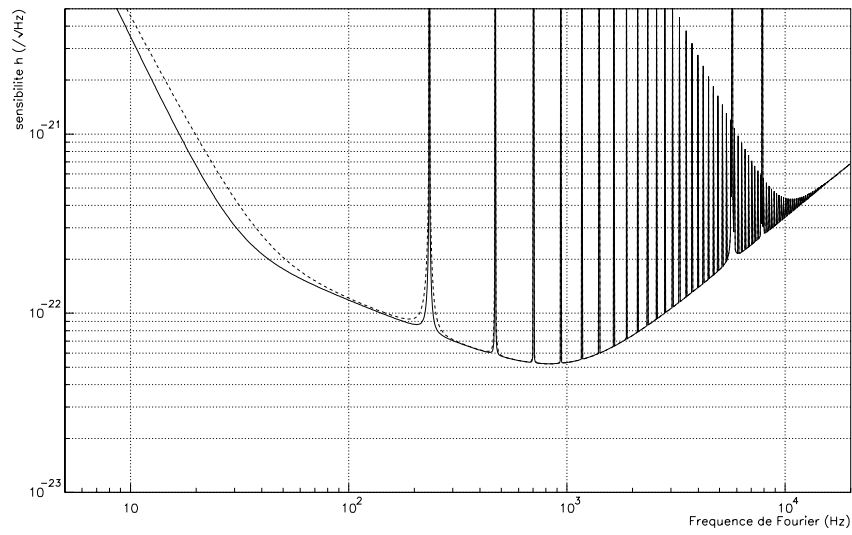


FIG. 2.16 – *Corde à piano avec (tirets) ou sans (trait plein) pertes thermoélastiques*

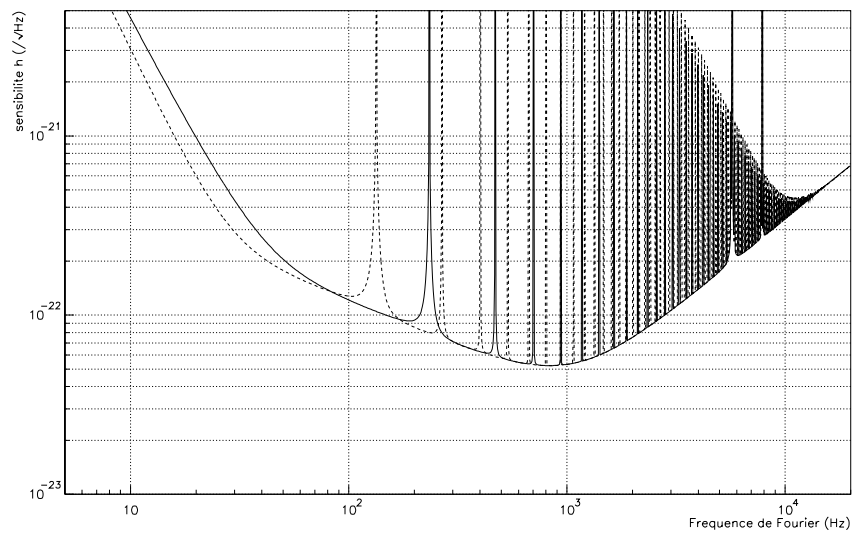


FIG. 2.17 – *Comparaison entre un fil en acier (trait plein) et un fil en tungstène-rhénium (trait pointillé) pour la sensibilité de l'interféromètre*

2.6 Conclusion

Le bruit pendulaire est simple à calculer lorsqu'on connaît la fonction de dissipation. Il faut donc pouvoir exprimer les pertes en fonction des pertes internes du matériau.

Le bruit des modes violon peut se calculer en identifiant chacune des résonances à un résonateur. La seule difficulté est le calcul des masses équivalentes de chacun des modes. Un modèle à constantes réparties, équivalent à un circuit électrique hyperfréquence, a l'intérêt d'expliquer simultanément le bruit pendulaire et le bruit des modes violon, et de fournir les masses équivalentes de ces derniers. Il permet également de modéliser les pertes de recul ou les fuites aux points d'attache. On établit un rapport entre le coefficient de qualité du mode pendule et celui du mode violon qui serait observé à la même fréquence.

Les discussions du chapitre précédent sur les processus de dissipations autorisent un choix a priori du matériau pour au moins minimiser les pertes par effet thermoélastique. Les mesures effectuées à Orsay peuvent être comparées aux prédictions de la thermoélasticité. On constate alors que les pertes semblent avoir un seuil constant auquel se superposent les pertes thermoélastiques lorsque celles-ci sont dans la gamme de mesure.

L'ensemble de ces considérations permet une estimation du bruit thermique des suspensions à attendre pour Virgo. En fait, il n'est pas très différent de celui qu'on obtient avec un modèle simple de corde à piano, sans pertes thermoélastiques.

Le bruit de position des miroirs dus au mouvement pendulaire thermique est donc

$$\tilde{x}_{\text{tot}} = 5,5 \cdot 10^{-18} \left(\frac{10\text{Hz}}{f} \right)^{5/2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.60)$$

et la sensibilité spectrale en h correspondante

$$\tilde{h}_n = 3,6 \cdot 10^{-21} \left(\frac{10\text{Hz}}{f} \right)^{5/2} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.61)$$

Pour améliorer sensiblement ce résultat, il faut soit refroidir les fils, soit trouver un matériau à très faibles pertes. La solution qui consiste à suspendre le miroir par deux boucles de fils peut également être remise en cause, pour trouver un nouveau système.

Chapitre 3

Bruit thermique des substrats des miroirs

Chaque mode de vibration interne des substrats cylindriques des miroirs est excité thermiquement. Un calcul précis du bruit simulant une onde gravitationnelle doit tenir compte de la déformation de la surface et de son couplage avec un faisceau lumineux.

La démarche suivie commence par modéliser chaque mode de résonance par un résonateur unidimensionnel. Le premier paramètre à évaluer est la fréquence de résonance. On rappellera la méthode de Hutchinson permettant de calculer celle-ci. Cette même méthode fournit les outils pour calculer la déformation en chaque point du solide, et donc, pour une énergie acoustique donnée, l'amplitude de déformation en chaque point de la surface et le déphasage produit sur le faisceau lumineux. Le calcul de la masse équivalente dans le modèle de l'oscillateur est alors aisé.

Le calcul du bruit thermique interne des masses nécessite encore la connaissance du facteur de dissipation $\phi(\omega)$, que l'on peut obtenir expérimentalement. La limitation de sensibilité de l'antenne gravitationnelle due à ce mode de vibration peut alors être évaluée.

3.1 Fréquences de résonance des miroirs

3.1.1 Calcul des fréquences

La détermination des fréquences de résonance d'un solide peut se faire par un programme d'éléments finis. Pour un cylindre libre dans l'espace, il existe une méthode de calcul plus précise, développée en 1980 par J.R. Hutchinson [51]. L'intérêt de cette méthode n'est pas dans la précision qu'elle permet dans le calcul des fréquences de résonance ; il est dans les calculs qu'elle permet par la suite : déformation de la surface et couplage avec un faisceau gaussien, calcul de l'énergie acoustique stockée, toutes opérations beaucoup plus laborieuses

avec un programme par éléments finis. La méthode utilise les équations de propagation des ondes acoustiques dans les milieux continus. On supposera pour ce calcul des fréquences que les ondes acoustiques se propagent sans atténuation.

Les substrats des miroirs de Virgo peuvent être considérés comme libres dans l'espace, c'est-à-dire avec des contraintes nulles en tout point de la surface. Dans la solution de référence de construction de Virgo, ces substrats sont accrochés par deux boucles de fils métalliques. Ces fils n'exercent des contraintes que localement, aux points de contact.

Une onde acoustique se propage suivant l'équation

$$\rho \partial_t^2 \vec{u} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) \quad (3.1)$$

où \vec{u} est le déplacement d'un point quelconque du solide, λ et μ sont les coefficients de Lamé. En analyse harmonique, $\vec{u} = \vec{u}_0(r, \varphi, z) e^{i\omega t}$. On ne considère que le phaseur \vec{u}_0 par la suite.

Il paraît naturel de rechercher des solutions en coordonnées cylindriques à l'équation 3.1. A.E.M. Love [52] en a fourni trois indépendantes :

$$\vec{u}_1(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} \partial_r & J_n(\delta r) \cos(\alpha z - \xi \frac{\pi}{2}) \cos(n\varphi + \varphi_0) \\ -\frac{n}{r} & J_n(\delta r) \cos(\alpha z - \xi \frac{\pi}{2}) \sin(n\varphi + \varphi_0) \\ -\alpha & J_n(\delta r) \sin(\alpha z - \xi \frac{\pi}{2}) \cos(n\varphi + \varphi_0) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\vec{u}_2(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} -\alpha \partial_r & J_n(\beta r) \cos(\alpha z - \xi \frac{\pi}{2}) \cos(n\varphi + \varphi_0) \\ \alpha \frac{n}{r} & J_n(\beta r) \cos(\alpha z - \xi \frac{\pi}{2}) \sin(n\varphi + \varphi_0) \\ -\beta^2 & J_n(\beta r) \sin(\alpha z - \xi \frac{\pi}{2}) \cos(n\varphi + \varphi_0) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\vec{u}_3(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{r} & J_n(\beta r) \cos(\alpha z - \xi \frac{\pi}{2}) \cos(n\varphi + \varphi_0) \\ \partial_r & J_n(\beta r) \cos(\alpha z - \xi \frac{\pi}{2}) \sin(n\varphi + \varphi_0) \\ 0 & \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

z est la coordonnée le long de l'axe du cylindre, r la coordonnée radiale et ϕ la coordonnée angulaire. L'origine est fixée au centre du cylindre. J_n est la n^{e} fonction de Bessel. Les solutions d'A.E.M. Love montrent que n est le nombre de diamètres nodaux et que ξ est un indice de parité indiquant si les faces opposées vibrent en phase ($\xi = 1$) ou en opposition de phase ($\xi = 0$). Cette classification des résonances est cohérente avec les observations de Mac-Mahon [53] en 1964.

L'onde \vec{u}_1 est longitudinale, \vec{u}_2 et \vec{u}_3 sont des ondes transversales, c'est-à-dire que $\text{rot} \vec{u}_1 = 0$ et $\text{div} \vec{u}_2 = \text{div} \vec{u}_3 = 0$.

Pour vérifier l'équation de propagation des ondes acoustiques, les coefficients α , β et δ sont tels que

$$\alpha^2 + \delta^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2} \quad (3.5)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2} \quad (3.6)$$

où les vitesses des ondes longitudinales et transversales sont définies en 1.33 et 1.34.

Une onde acoustique doit vérifier l'équation 3.1, ainsi que

$$\theta(x, y, z)_{vu} = 0 \quad (3.7)$$

où u est la coordonnée normale à la surface et v une coordonnée quelconque. Comme nous l'avons montré, 3.7 est un ensemble de 9 équations (3 équations pour chacune des trois surfaces du cylindre).

Il est impossible d'annuler toutes les contraintes sur les surfaces du cylindre avec une des ondes de Love. L'idée de J.R. Hutchinson est d'utiliser un ensemble de combinaisons linéaires de celles-ci

$$\vec{u}_A = 2C_1\vec{u}_1(\alpha_A, \delta_A) + C_2\vec{u}_2(\alpha_A, \beta_A) \quad (3.8)$$

$$\vec{u}_B = 2C_3\vec{u}_1(\delta_B, \alpha_B) + C_4\vec{u}_2(\beta_B, \alpha_B) \quad (3.9)$$

$$\vec{u}_C = 2C_6\vec{u}_1(\alpha_C, \delta_C) + C_5\vec{u}_3(\alpha_C, \beta_C) \quad (3.10)$$

et on recherche une solution générale sous la forme :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{NZ} A_i \vec{u}_{A_i} + \sum_{j=1}^{NR} B_j \vec{u}_{B_j} + \sum_{k=1}^{NZ} C_k \vec{u}_{C_k} \quad (3.11)$$

où α_A , β_A , δ_A ont les indices i , α_B , β_B et δ_B ont les indices j , et α_C , β_C et δ_C les indices k . Les entiers NR et NZ donnent le nombre d'éléments retenus dans la série. On les choisit de façon à ce que la convergence soit acceptable [54] et tels que

$$NZ = NR \frac{H}{2R} \quad (3.12)$$

R est le rayon du cylindre, H en est l'épaisseur.

Il est alors possible de calculer les tenseurs de déformation et de contraintes (voir [55] pour le calcul détaillé).

Il faut annuler 3 contraintes sur chacune des surfaces, soit en $z = \pm H/2$:

$$\theta_{Arz} = 0 \quad (3.13) \quad \theta_{Brz} = 0 \quad (3.14) \quad \theta_{Crz} = 0 \quad (3.15)$$

$$\theta_{A\varphi z} = 0 \quad (3.16) \quad \theta_{B\varphi z} = 0 \quad (3.17) \quad \theta_{C\varphi z} = 0 \quad (3.18)$$

$$\theta_{Azz} = 0 \quad (3.19) \quad \theta_{Bzz} = 0 \quad (3.20) \quad \theta_{Czz} = 0 \quad (3.21)$$

et en $r = R$:

$$\theta_{Arz} = 0 \quad (3.22) \quad \theta_{Brz} = 0 \quad (3.23) \quad \theta_{Crz} = 0 \quad (3.24)$$

$$\theta_{Arr} = 0 \quad (3.25) \quad \theta_{Brr} = 0 \quad (3.26) \quad \theta_{Crr} = 0 \quad (3.27)$$

$$\theta_{Ar\varphi} = 0 \quad (3.28) \quad \theta_{Br\varphi} = 0 \quad (3.29) \quad \theta_{Cr\varphi} = 0 \quad (3.30)$$

Soit donc 18 contraintes à annuler.

Parmi ces 18 équations aux limites, les équations 3.13, 3.15, 3.16 et 3.18 permettent d'établir

$$\alpha_{A_i} = \alpha_{C_i} \quad (3.31)$$

$$\sin(\alpha_{A_i} \frac{H}{2R} - \xi\pi/2) = 0 \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

L'équation 3.23 fournit

$$J'_n(\alpha_{B_j} R) = 0 \quad (3.34)$$

Les équations 3.22, 3.24 et (3.14 et 3.17) impliquent des relations entre C_1 et C_2 , entre C_3 et C_4 , entre C_5 et C_6 . On peut donc déterminer ces 6 coefficients, pour que les équations décrites soient vérifiées.

Les 9 équations aux limites restantes impliquent des relations matricielles entre les coefficients A_i , B_j et C_k : elles fournissent les nombres a_i , b_{ij} , c_i , \bar{a}_{ji} , \bar{b}_j , \bar{c}_{ji} , \hat{a}_i , \hat{b}_{ij} , \hat{c}_i tels que

$$a_i A_i + \sum_{j=1}^{NR} b_{ij} B_j + c_i C_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, NZ \quad (3.35)$$

$$\sum_{i=1}^{NZ} \bar{a}_{ji} A_i + \bar{b}_j B_j + \sum_{i=1}^{NZ} \bar{c}_{ji} C_i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, NR \quad (3.36)$$

$$\hat{a}_i A_i + \sum_{j=1}^{NR} \hat{b}_{ij} B_j + \hat{c}_i C_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, NZ \quad (3.37)$$

Sous forme matricielle, ceci peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

où a , c , \bar{b} , \hat{a} et \hat{c} sont des matrices diagonales. Définissons les matrices suivantes,

$$a^* = a - c(\hat{c})^{-1}\hat{a} \quad (3.39)$$

$$\bar{a}^* = \bar{a} - \bar{c}(\hat{c})^{-1}\hat{a} \quad (3.40)$$

$$b^* = b - c(\hat{c})^{-1}\hat{b} \quad (3.41)$$

$$\bar{b}^* = \bar{b} - \bar{c}(\hat{c})^{-1}\hat{b} \quad (3.42)$$

$$d = \bar{b}^* - \bar{a}^*(a^*)^{-1}b^* \quad (3.43)$$

les matrices A , B et C doivent vérifier

$$d B = 0 \quad (3.44)$$

$$A = -(a^*)^{-1}b^* B \quad (3.45)$$

$$C = -(\hat{c})^{-1}[\hat{a}A + \hat{b}B] \quad (3.46)$$

On trouve finalement qu'il faut annuler le déterminant de la matrice d . Seules certaines fréquences sont solutions. Parmi celles-ci, il faut encore retirer celles qui correspondent à une dégénérescence des matrices, qui sont appelées fausses fréquences. Les solutions restantes sont numérotées par un indice m .

Chaque fréquence de résonance est donc caractérisée par trois nombres

- l'ordre circonférentiel n qui indique le nombre de diamètres nodaux,
- la parité ξ qui vaut 1 (modes impairs) si les faces opposées vibrent en phase et 0 (modes pairs) si elles vibrent en opposition de phase,
- un numéro d'ordre m pour n et ξ donné.

J'ai développé le code « CYPRES » [56] qui calcule les résonances d'un cylindre par la procédure qu'on vient de voir, et le bruit thermique par la méthode qu'on va décrire par la suite.

3.1.2 Mesures des fréquences de résonance

On remarque que la valeur calculée semble être une valeur approchée par excès : quand on fait croître NR et NZ, la fréquence diminue. Une convergence intéressante est obtenue lorsque le plus petit des deux termes vaut 4 (cf. [51]).

Il est intéressant de comparer les fréquences de résonance obtenues avec des mesures ; c'est ce que Hutchinson a fait en comparant ses résultats aux mesures effectuées par Mac-Mahon. Pour les substrats en silice fondue (Hérasil) des miroirs de Virgo, nous pouvons également comparer les prédictions aux mesures effectuées à Orsay [57, 58, 49] sur des blocs de 50 cm de diamètre et 18 cm d'épaisseur (77 kg), et aux résultats fournis par le logiciel aux

éléments finis SYSTUS [59] :

Programme « CYPRES »		Mesures						Éléments finis SYSTUS	
Mode n, ξ, m	freq. Hz	[57]		[58]		[49]		freq. Hz	Δ %
		freq. Hz	Δ %	freq. Hz	Δ %	freq. Hz	Δ %		
2.1.1	3422	3430	0,23	3394	0,82	3394	0,82	3542	3,4
								3544	3,4
0.1.1	4773	4773	0	4735	0,02	4735	0,02	4923	3,1
2.0.1	5618								
3.1.1	6243			6227	0,26				
1.0.1	6247	6250	0,05						
0.0.1	6938								
1.0.2	7153			7268	1,3				
1.1.1	7569			7626	0,8				
3.0.1	8572								
4.1.1	8974								

L'écart Δ est calculé avec (valeur calculée - valeur mesurée) / valeur calculée. Certaines fréquences n'ont pas été mesurées : lorsque les mesures ont été menées, le programme de calcul des fréquences n'existait pas ; il est difficile alors de rechercher des résonances très étroites dans un spectre lorsqu'on n'a pas d'indication sur le lieu où les trouver. De plus, ces mesures n'avaient pas pour but une recherche systématique des résonances, mais une mesure des coefficients de qualité.

On remarque que le programme par éléments finis prédit des valeurs légèrement surévaluées, ce qui est normal : le pas fini de la maille augmente la raideur du solide. Deux valeurs sont parfois données par SYSTUS, correspondant à deux résonances de formes identiques mais l'une avec une symétrie suivant (Ox), et l'autre suivant (Oy). L'accord entre les valeurs prédites et les valeurs mesurées semble très bon, inférieur à 1 % dans la plupart des cas. Il n'est sans doute pas possible de réduire encore cet écart. D'une part, la précision de la fréquence prédite est limitée par le nombre de termes NR et NZ retenus dans la série et par la précision des données dont on dispose sur le matériau (1 %). D'autre part, de légers écart à la forme cylindrique idéale peuvent également provoquer une variation des fréquences.

Enfin, le bon accord permet de vérifier que la suspension par deux boucles de corde à piano ne change pas notablement les conditions par rapport à un miroir libre dans l'espace.

3.2 Calcul des masses équivalentes

3.2.1 Déplacement équivalent pour un faisceau gaussien

Un des coefficients A_i , B_j et C_k doit être choisi arbitrairement (par exemple A_1). Les équations 3.44, 3.45 et 3.46 permettent alors de calculer la déformation de la surface, mais l'amplitude est arbitraire.

La donnée de la fréquence de résonance d'un mode donnée et du coefficient A_1 par exemple permet de calculer l'ensemble des autres coefficients et donc la déformation de la surface, avec une amplitude arbitraire (fixée par A_1).

Un mode TEM₀₀ dont le col a une dimension w sur la surface du miroir verra donc un déplacement

$$\Delta z = \int_{\text{surface}} u_z(r, \varphi, z = h) P(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (3.47)$$

où P est la distribution d'intensité de lumière,

$$P(r, \varphi) = \frac{2}{\pi w^2} \exp\left(-2\frac{D^2}{w^2}\right) \quad (3.48)$$

Si le faisceau est centré, $D = r$, sinon $D = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi - \varphi_1)}$. Ici d est la distance entre le centre du faisceau et l'axe du miroir, φ_1 est un angle relatif à l'axe (Oy) par exemple.

Avec les formules de déplacement (3.2) (3.3) (3.4), on voit immédiatement que si le faisceau est centré sur le miroir et si $n \geq 1$, alors $\Delta z = 0$ (l'intégrale suivant φ s'annule). Seuls les modes $n = 0$, à symétrie cylindrique, appelés « modes tambour », sont donc bruyants. Les miroirs de Virgo n'étant ni des cylindres très plats ni de longs tubes, la fréquence de résonance la plus basse (mode 2.1.1) ne donne donc pas de bruit pour la détection. Le mode bruyant de plus basse fréquence est alors le mode 0.1.1.

3.2.2 Calcul de l'énergie acoustique stockée

Le paramètre suivant du résonateur à obtenir est la masse effective. Pour cela, on calcule la densité d'énergie potentielle acoustique stockée [33]

$$d\mathcal{E} = \left[\frac{\lambda}{2} \left(\sum_i E_{ii} \right)^2 + \mu \sum_{i,k} E_{ik}^2 \right] dV \quad (3.49)$$

où E_{ij} est le tenseur de déformation.

La trace du tenseur de déformation peut se calculer analytiquement : elle est nulle pour les ondes transversales puisqu'il n'y a pas variation de volume, et son expression pour les ondes longitudinales est simple. Le deuxième terme par contre doit être intégré numériquement.

Pour une amplitude donnée, on peut donc calculer l'énergie et le déplacement équivalent vu par un faisceau gaussien ; Si Δz représente le maximum de déplacement, on peut définir une masse effective de résonateur par

$$\frac{1}{2}M_i\omega_i^2\Delta z^2 = \mathcal{E} \quad (3.50)$$

où i est l'indice du mode (l'ensemble n, ξ, m).

3.3 Modèle de calcul du bruit thermique

3.3.1 Procédure

Le programme « CYPRES » permet

- d'entrer les paramètres physiques relatifs au matériau du cylindre,
- d'entrer les paramètres du faisceau lumineux (taille du col, désalignement éventuel),
- de créer les fichiers permettant l'affichage de différentes courbes, comme par exemple la fréquence de résonance en fonction de la taille pour comparaison avec les résultats de J.R. Hutchinson ; cela offre par exemple la possibilité de concevoir le miroir de manière à maximiser la première fréquence de résonance de mode tambour,
- de calculer pour une amplitude arbitraire fixée par le programme, l'énergie potentielle acoustique, le déplacement équivalent pour un faisceau gaussien et en définitive la masse effective du résonateur équivalent.

3.3.2 Validation des résultats

Le calcul des fréquences de résonance est validé par comparaison aux résultats obtenus par M.M. Hutchinson et Mac-Mahon, et par comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus à Orsay. On peut également vérifier que pour des facteurs d'aspects $h = H/(2R)$ petits, on obtient des modes fondamentaux impairs qui varient suivant la loi déjà connue $f \propto H/R^2$. Les substrats des miroirs de l'expérience Virgo sont trop épais pour vérifier cette relation : la méthode développée par J.R. Hutchinson présente donc beaucoup d'intérêt dans ce cas.

On vérifie que le calcul de l'énergie n'est pas sensible aux nombres NR et NZ de termes dans la série, quand NR et NZ sont suffisamment grands (il y a bien convergence). Il ne dépend pas non plus du pas d'échantillonnage choisi dans le calcul numérique de l'intégration de l'énergie, au moins lorsque m n'est pas très élevé. Lorsque m est élevé, le nombre fini de mailles dans chacune des dimensions (50) devient insuffisant pour que le résultat soit

précis ; mais le temps de calcul d'un mode (quelques minutes) deviendrait alors rédhibitoire. Néanmoins, chaque mode contribue alors peu au bruit thermique : le couplage avec le faisceau lumineux est faible et les masses équivalentes sont élevées. La contribution de chaque mode devenant faible, l'erreur sur le calcul de l'énergie devient négligeable.

Les résultats [60] ont aussi été comparés à ceux obtenus par l'équipe de LIGO, qui ont développé une méthode similaire en parallèle [61], pour le calcul du bruit des miroirs du prototype de 40 m de Caltech. Les résultats sont compatibles.

3.3.3 Résultats

Fréquences de résonance des optiques de l'interféromètre Virgo

La séparatrice, en silice fondue, a un diamètre de 230 mm et une épaisseur de 55 mm. Sa masse est de 5 kg. Ses fréquences de résonance inférieures à 15 kHz sont donc

numéro de mode	fréquences
0 1 1	7798
1 0 1	13720
1 1 1	14666
2 0 1	12221
2 1 1	5392
3 1 1	10691
3 1 1	10691

Le miroir de recyclage a un diamètre de 120 mm et une épaisseur de 30 mm. Sa masse est de 750 g. Les fréquences de résonance en dessous de 15 kHz sont donc

numéro de mode	fréquences
0 1 1	15377
2 1 1	10666

Les miroirs à l'entrée des cavités ont un diamètre de 350 mm et une épaisseur de 100 mm. Leur masse est de 21,2 kg. Leurs premières fréquences de résonance sont

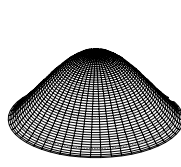
numéro de mode	fréquences
0 0 1	10380
0 1 1	5719
1 0 1	9013
1 1 1	10288
2 0 1	8031
2 0 2	13897
2 1 1	4005
2 1 2	14559
3 0 1	12278
3 1 1	7720
4 1 1	11503

Les miroirs à l'extrémité des cavités Fabry Perot ont un diamètre de 350 mm et une épaisseur de 200 mm. Leur masse est de 42,4 kg. Leurs premières fréquences de résonance sont

numéro de mode	fréquences
0 0 1	10157
0 0 2	12981
0 1 1	7849
0 1 2	14886
1 0 1	8965
1 0 2	13109
1 0 3	14876
1 1 1	9707
1 1 2	12682
2 0 1	8030
2 0 2	12597
2 0 3	14430
2 1 1	5753
2 1 2	12963
3 0 1	12256
3 0 2	14224
3 1 1	9941
4 1 1	13826

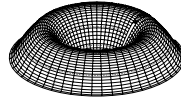
Déformation de la surface

Les modes résonnants ont des profils variés



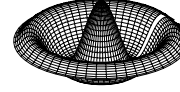
surface

(a) mode 0.1.1



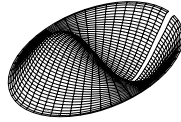
surface

(b) mode 0.1.2



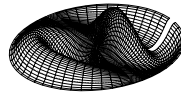
surface

(c) mode 0.1.3



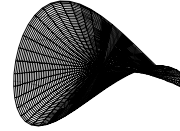
surface

(d) mode 1.1.1



surface

(e) mode 1.1.2



surface

(f) mode 2.1.1

Les modes pairs et impairs ont des allures identiques.

Le bruit thermique se calcule par

$$\tilde{x}^2 = \frac{4k_B T}{\omega} \sum_{\text{modes } i} \frac{\phi_i(\omega) \omega_i^2}{M_i \left[(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \phi_i^2(\omega) \omega_i^4 \right]} \quad (3.51)$$

La première fréquence de résonance se situe au-dessus du spectre de détection. D'où, si les pertes sont modélisées par l'angle ϕ ,

$$\tilde{x}^2 = \frac{4k_B T}{\omega} \sum_{\text{modes } i} \frac{\phi_i(\omega)}{M_i \omega_i^2} \quad (3.52)$$

et si le modèle est celui d'un Q constant,

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \sum_{\text{modes } i} \frac{1}{Q_i M_i \omega_i^3} \quad (3.53)$$

On fait l'hypothèse que l'angle de pertes est le même pour tous les modes à une fréquence donnée. Cela peut être vrai quand, par exemple, les pertes sont internes. Si les pertes n'étaient pas identiques pour les ondes longitudinales et les ondes transversales, ou si elles dépendaient de la géométrie du mode, alors il serait difficile de poursuivre le calcul.

On est donc amené à évaluer les facteurs

$$M_{\text{eq}}\omega_{\text{eq}}^2 = \left(\sum_i \frac{1}{M_i\omega_i^2} \right)^{-1}, \quad \text{pour tous modes } f_i \leq f_{\text{max}} \quad (3.54)$$

dans le cas où ϕ est indépendant de la fréquence, et

$$M_{\text{eq}}\omega_{\text{eq}}^3 = \left(\sum_i \frac{1}{M_i\omega_i^3} \right)^{-1}, \quad \text{pour tous modes } f_i \leq f_{\text{max}} \quad (3.55)$$

si Q est constant.

La fréquence de coupure f_{max} est déterminée de façon à ce que les séries convergent. En pratique, lorsqu'on essaie différentes tailles de miroirs, on choisit $f_{\text{max}} = 150$ kHz, $f_{\text{max}} = 30$ kHz, pour les calculs avec désalignements du faisceau (beaucoup de modes entrent alors en ligne de compte) et $f_{\text{max}} = 300$ kHz avec la taille définitive choisie.

Miroir d'entrée

Pour le miroir d'entrée des cavités Fabry Perot, le col du faisceau vaut 1.98 cm. On cherche à optimiser les dimensions du substrats cylindrique, en supposant ϕ constant ; il faut donc minimiser le rapport $1/M_{\text{eq}}\omega_{\text{eq}}^2$

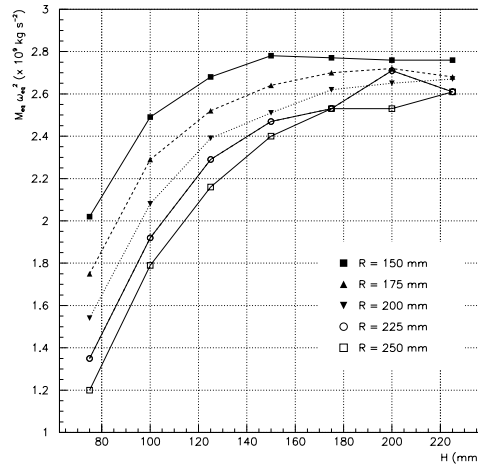


FIG. 3.1 – Optimisation de la taille du miroir d'entrée

L'épaisseur du miroir d'entrée ne doit pas dépasser 100 mm : la puissance lumineuse absorbée devient alors trop importante [62]. On a alors intérêt, pour minimiser le bruit interne des miroirs, à prendre un petit rayon. Il faut faire là un compromis avec le bruit thermique pendulaire, qui diminue lorsque la masse augmente. On choisit donc $R = 175$ mm et $H = 100$ mm. On teste alors la convergence de la série $1/M_{\text{eq}}\omega_{\text{eq}}^2$ en fonction de la fréquence maximale de résonance calculée

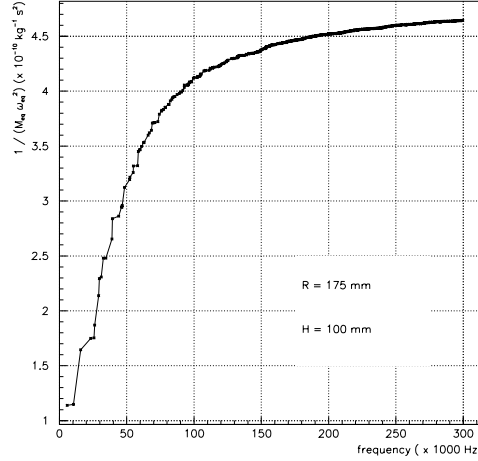
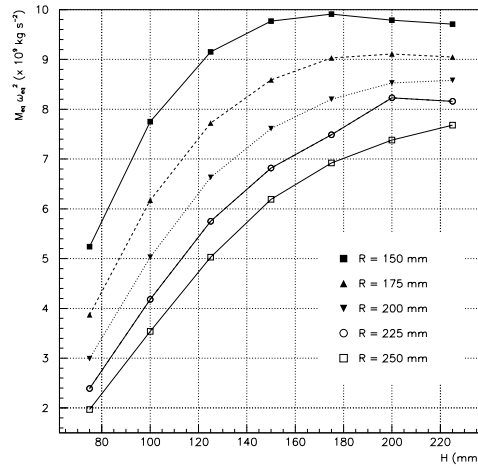


FIG. 3.2 – *Convergence du bruit thermique en fonction de la fréquence de coupure*

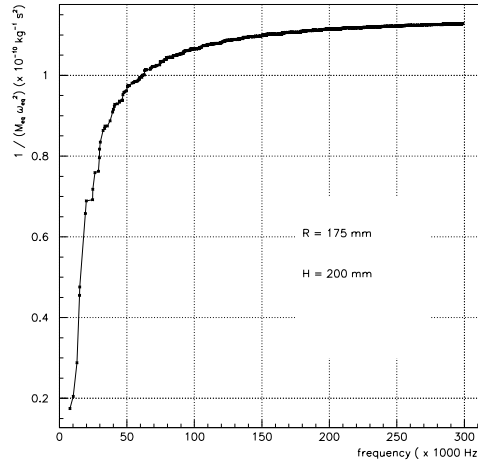
La fréquence de coupure $f_{\text{max}} = 300$ kHz semble donc acceptable (448 modes sont calculés). La fréquence de coupure choisie pour le calcul des différentes tailles (150 kHz) est trop basse, mais donne un bon ordre de grandeur du résultat. On trouve pour les dimensions retenues que $M_{\text{eq}}\omega_{\text{eq}}^2 = 2,16 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$. La masse du substrat d'entrée est de 21,2 kg, la fréquence tambour fondamentale est de 5 720 Hz, et la masse équivalente de ce mode est de 6,79 kg.

Miroir d'extrémité des cavités

Pour le miroir de fond, la taille du faisceau est de 5,48 cm. L'optimisation des dimensions du substrat conduit au réseau de courbes

FIG. 3.3 – *Optimisation de la taille du miroir de fond*

Il n'y a pas là de contraintes sur l'épaisseur du miroir. Par contre, un compromis avec le bruit pendulaire amène à choisir un rayon de 175 mm. La meilleure épaisseur est alors de 200 mm. Pour ces dimensions, on peut vérifier la convergence :

FIG. 3.4 – *Convergence du bruit thermique en fonction de la fréquence de coupure*

Lorsque $f_{\max} = 300$ kHz, 752 modes sont calculés. On a alors $M_{\text{eq}} \omega_{\text{eq}}^2 = 8,86 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$, la fréquence tambour fondamentale est de 7 850 Hz pour une masse effective de 23,5 kg.

Taille du col de faisceau

Il est intéressant de voir ce qu'il advient du facteur $M_{eq}\omega_{eq}^2$ lorsque la taille du faisceau varie, de manière à donner des indications utiles pour des générations futures d'interféromètres. La fréquence de coupure choisie pour ces calculs est $f_{max} = 30$ kHz.

Pour le miroir d'entrée, on trouve

Col du faisceau (cm)	1,98	3	4	5	6
$M_{eq}\omega_{eq}^2$ ($\times 10^9$ kg.s $^{-2}$)	4,36	4,90	5,66	6,95	7,92

et des résultats similaires pour le miroir de fond

Col du faisceau (cm)	5,48	6	7	8	9
$M_{eq}\omega_{eq}^2$ ($\times 10^9$ kg.s $^{-2}$)	12,2	13,6	16,6	20,3	24,9

On a donc intérêt à avoir le faisceau le plus large possible, ce qui est logique puisqu'ainsi la déformation de la surface est mieux moyennée.

Désalignement du faisceau

Quand le faisceau est désaligné, tous les modes deviennent bruyants. Pour garder des limites raisonnables au calcul, on choisit donc une fréquence de coupure de 30 kHz. Le bruit dépend aussi de la disposition des diamètres nodaux des uns par rapport aux autres. Le modèle exposé ici ne permet pas de briser la symétrie cylindrique ; on choisit donc de faire le calcul dans le cas le plus défavorable, où on se situe sur un ventre de vibration pour tous les modes ($\varphi = 0$).

On a alors, pour le miroir de fond

Désalignement (cm)	0	2	4	6	8	10	12
$M_{eq}\omega_{eq}^2$ ($\times 10^9$ kg.s $^{-2}$)	12,2	13,7	13,5	13,1	12,2	10,8	10,3

et pour le miroir d'entrée

Désalignement (cm)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$M_{eq}\omega_{eq}^2$ ($\times 10^9$ kg.s $^{-2}$)	4,36	4,37	4,39	4,41	4,45	4,49	4,53

Le bruit thermique interne ne semble donc pas très sensible aux désalignements du faisceau. L'amélioration apparente du bruit pour de légers désalignements vient du fait que la contribution des modes tambour décroît alors que la contribution des autres modes ne devient pas encore apparente. Toutefois, la faiblesse de la fréquence de coupure ne permet pas de donner d'avis définitif ; du point de vue qualitatif, il semble qu'un léger désalignement soit indifférent.

Conclusion

Avec les dimensions retenues pour les substrats des miroirs de Virgo, le bruit interne de ceux-ci devient :

$$\tilde{x}^2 = \frac{4k_B T}{\omega} \phi(\omega) 2 \times \left(\frac{1}{2, 16.10^9} + \frac{1}{8, 86.10^9} \right) \quad (3.56)$$

D'où

$$\tilde{x}^2 = 3 \cdot 10^{-38} \left(\frac{T}{300\text{K}} \right) \left(\frac{100\text{ Hz}}{f} \right) \left(\frac{\phi}{10^{-6}} \right) \text{ m}^2/\text{Hz} \quad (3.57)$$

soit, en termes de sensibilité à h

$$\tilde{h}_n = 1, 16.10^{-22} \sqrt{\left(\frac{T}{300\text{K}} \right) \left(\frac{100\text{ Hz}}{f} \right) \left(\frac{\phi}{10^{-6}} \right)} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (3.58)$$

3.4 Des substrats en saphir ?

Le saphir semble un matériau intéressant : sa densité est presque deux fois celle de la silice fondue (3980 kg/m³ au lieu de 2202). Pour des dimensions équivalentes, le bruit pendulaire est donc réduit. De plus, les vitesses du son sont plus élevées ; les fréquences de résonance sont donc plus grandes ; ceci laisse penser que des miroirs en saphir donnent un bruit thermique interne des substrats plus faible.

L'angle de pertes acoustiques internes est mal connu, mais il semble qu'il soit de l'ordre de 10⁻⁷–10⁻⁸ [41]. La faisabilité de blocs de grandes dimensions semble possible [63]. Le saphir étant un cristal, les propriétés optiques peuvent être différentes d'un matériau amorphe comme la silice fondue. Avant le choix définitif d'un tel matériau, des études de biréfringence, de pertes optiques restent donc à faire.

L'épaisseur des miroirs d'entrée en silice est déterminée par les pertes optiques : la lumière absorbée produit des dilatations et donc des gradients d'indice. La chaleur se propage plus vite dans le saphir, on peut donc probablement supporter des pertes plus élevées. Mais l'étude exacte n'étant pas effectuée, et les pertes optiques dans le saphir non mesurées, on se borne à supposer une épaisseur identique (10 cm) aux substrats en silice. Pour un diamètre de 35 cm, la masse d'un tel substrat est alors de 38,3 kg. Une épaisseur double amène à une masse très élevée ; on choisit donc de mettre les quatre miroirs de même dimensions.

L'utilisation du code « CYPRES » n'est pas si évidente. Ce code est basé sur les équations de l'élasticité des milieux continus, évidemment isotropes. Dans un cristal, la vitesse de propagation des ondes acoustiques dépend de la direction : strictement parlant, les conditions ne sont pas remplies pour l'utilisation du code. Toutefois, une utilisation permet

une première estimation, même approximative. Une mesure des fréquences de résonance d'un échantillon cylindrique permettra de vérifier l'écart ; si celui-ci est faible, alors les résultats sont valides. Cet avertissement étant effectué (et la mesure des fréquences de résonance restant à faire), on peut calculer le bruit thermique d'un substrat en saphir. Pour des miroirs de 350 mm de diamètre et 100 mm d'épaisseur, les fréquences de résonance au-dessous de 20 kHz ne sont alors qu'au nombre de deux, et valent 10066 Hz (mode 0.1.1) et 18475 Hz (mode 0.0.1).

En faisant l'hypothèse d'un angle de pertes constant, on trouve alors

- pour les miroirs d'entrée des cavités Fabry Perot, $M_{eq}\omega_{eq}^2 = 1,22.10^{10} \text{ kg.s}^{-2}$
- pour les miroirs d'extrémité, $M_{eq}\omega_{eq}^2 = 3,38.10^{10} \text{ kg.s}^{-2}$

La sensibilité limite due au bruit des modes internes du miroir est donc

$$\tilde{h}_n \sim 1,62.10^{-23} \sqrt{\left(\frac{T}{300\text{K}}\right)\left(\frac{100 \text{ Hz}}{f}\right)\left(\frac{\phi}{10^{-7}}\right)} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (3.59)$$

La figure 3.5 permet de comparer les sensibilités de Virgo si le miroir est en silice avec un angle de pertes de 10^{-6} (courbe du haut), en silice avec un angle de pertes de 10^{-7} (courbe du milieu) et en saphir avec un angle de pertes de 10^{-7} (courbe du bas). Le diamètre du fil, dans chacune des configurations, est calculé de façon à être à chaque fois à 50 % de la limite élastique. Les fréquences des modes violon sont donc les mêmes dans chacun des cas.

3.5 Mesures de facteurs de qualité

La mesure des coefficients de surtension mécanique des résonances suit le même principe que dans le cas des fils : exciter une résonance par application d'une force sinusoïdale sur le cylindre, couper l'excitation et mesurer le temps de relaxation de l'amplitude de vibration.

L'excitation est effectuée par une plaque de bandes parallèles, chacune alternativement reliée à une borne de l'alimentation électrique. Le cylindre, à quelques millimètres de cette plaque, agit comme un diélectrique dans un condensateur : l'énergie est minimale lorsque le diélectrique est complètement entre les deux plaques. Lorsqu'une tension est appliquée, une force s'exerce donc sur le cylindre. Une tension alternative permet d'exciter les résonances.

La détection est simplement constituée par un faisceau laser se réfléchissant sur le miroir puis tombant sur une photodiode à quadrants. Lorsque le miroir vibre, la lumière sur chacun des quadrants est différente ; une mesure différentielle permet la mesure d'une grandeur proportionnelle à l'amplitude de vibration (voir figure 3.6).

Les mesures ont été effectuées pour des intervalles de 11 et 7 cm entre les deux boucles de suspension (corde à piano). Nous avons également, après la première campagne de mesure, fait polir le miroir sur ses bords, pour étudier l'effet des pertes de surface.

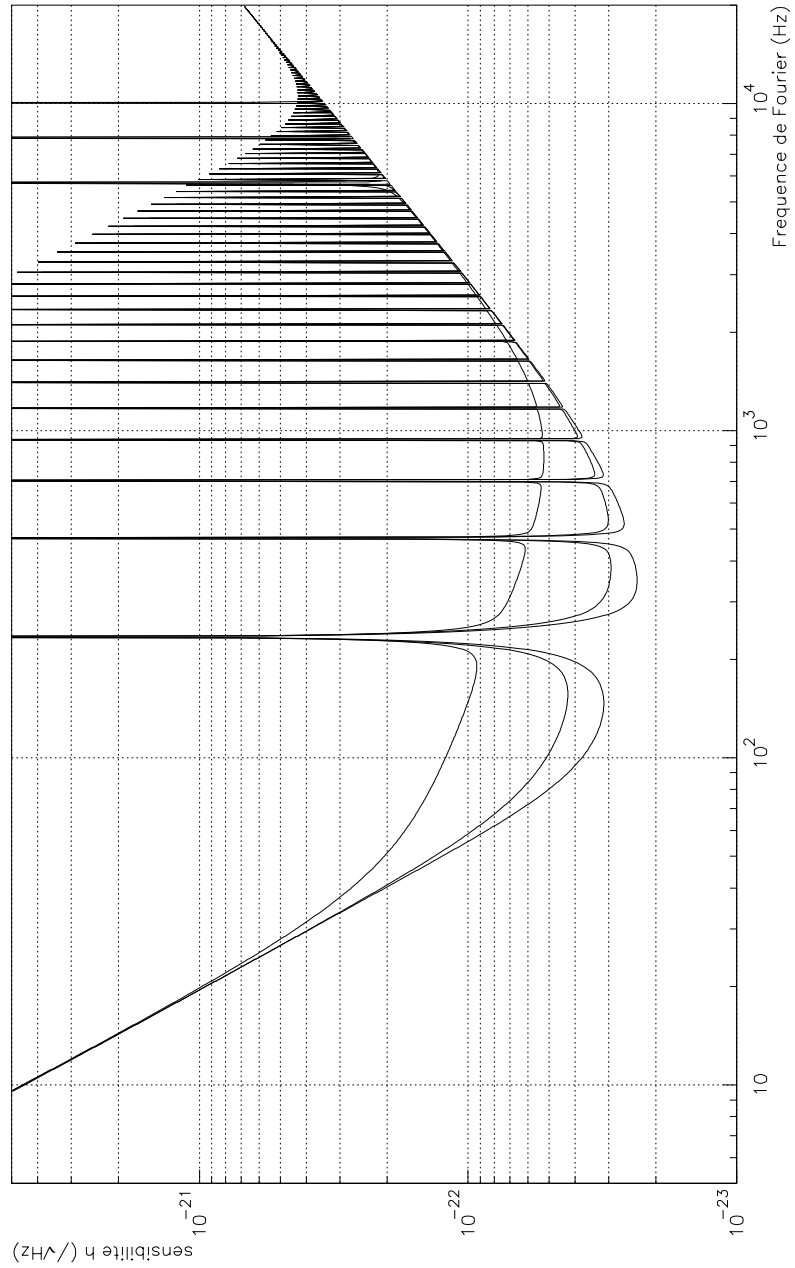


FIG. 3.5 – Sensibilité de l'interféromètre pour différents types de miroirs (voir texte). La courbe du haut est pour un miroir en silice avec un angle de pertes $\phi(\omega) = 10^{-6}$, la courbe centrale pour un miroir en silice avec $\phi(\omega) = 10^{-7}$, la courbe du bas pour un miroir en saphir avec $\phi(\omega) = 10^{-7}$

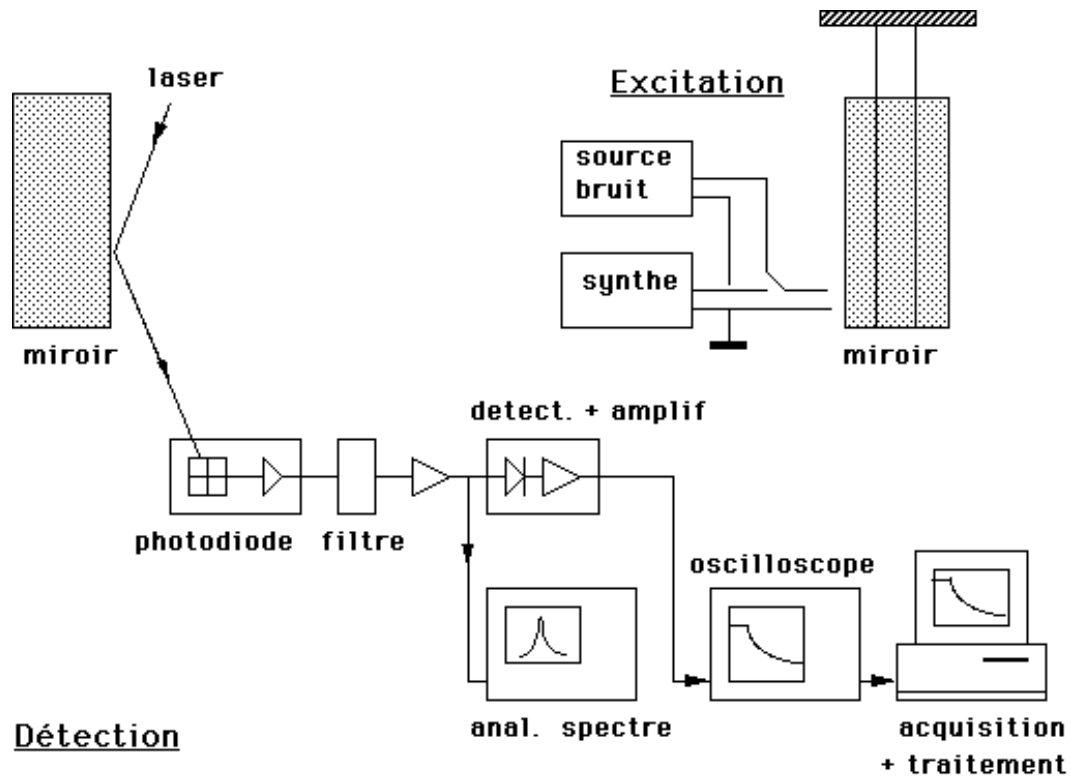


FIG. 3.6 – Dispositif expérimental de mesure des résonances d'un bloc cylindrique de silice

les coefficients de qualité mesurés sont alors :

Fréquence (Hz)	espacement des boucles 11 cm		espacement des boucles 7 cm	
	Avant polissage	Après polissage	Avant polissage	Après polissage
3395	$1,0.10^6$	$1,1.10^6$	$1,1.10^6$	$1,3.10^6$
4730	$1,0.10^6$	$0,9.10^6$	$0,73.10^6$	$0,9.10^6$
7630	$0,66.10^6$	$0,6.10^6$	$0,68.10^6$	$0,9.10^6$

L'incertitude d'une mesure est d'environ 5 %.

Le polissage des surfaces n'améliore pas de façon significative le coefficient de qualité. Le changement de l'espacement entre les fils ne conduit pas à des modifications significatives des coefficients de qualité.

Il semble qu'on puisse retenir un angle de pertes constant $\phi = 10^{-6}$ pour la modélisation du bruit thermique dans l'interféromètre.

3.6 Conclusion

Les calculs effectués dans le chapitre précédent permettent l'évaluation du bruit thermique des fils de suspension ; par exemple, avec des cordes à piano, telles que définies dans la solution de référence, ce sont alors les pertes thermoélastiques qui dominent. Le bruit thermique des modes internes de vibration des substrats que l'on vient de calculer (avec des pertes internes $\phi = 10^{-6}$) permet, en ajoutant le bruit de photons étudié au deuxième chapitre, d'obtenir le spectre de sensibilité de Virgo (voir figure 3.7).

Les contributions du mode pendule (dominant de 5 à 40 Hz), des modes internes des miroirs (dominant de 40 à 1 kHz) et du bruit de photons ont été représentées.

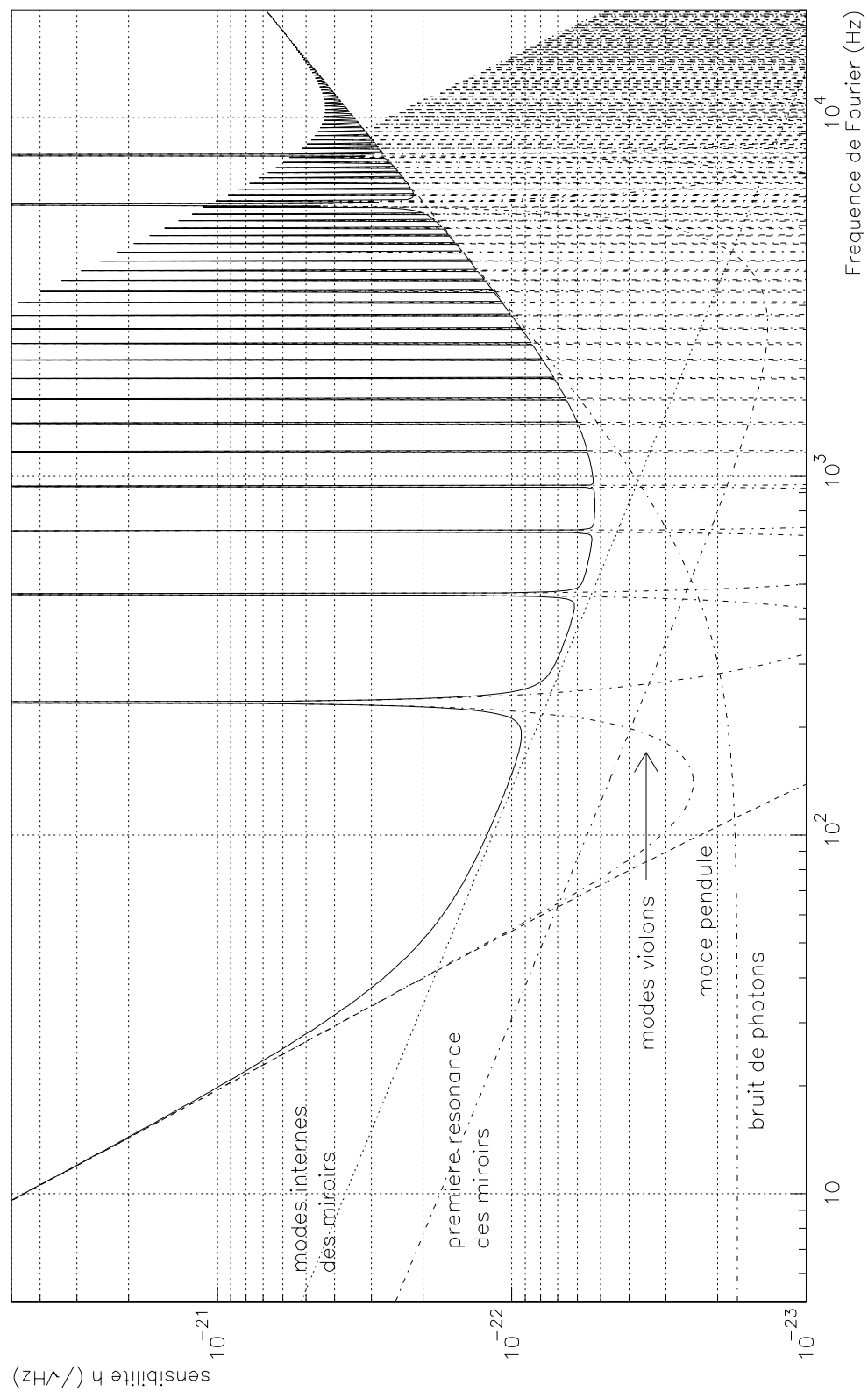


FIG. 3.7 – Sensibilité de l'interféromètre

Chapitre 4

Faisabilité d'une expérience de mesure directe de bruit thermique

4.1 Motivation

Une expérience de mesure directe du bruit thermique permettrait de tester et d'améliorer la sensibilité de l'interféromètre, ceci alors que l'antenne est en fonctionnement. De nouvelles idées de suspensions, de matériaux pourraient ainsi être essayées.

Le premier intérêt est de vérifier que l'amplitude prédite par le modèle d'une série de résonateurs, au moyen des valeurs connues des fréquences de résonances, des masses et des coefficients de surtension mécanique mesurés, est bien celle attendue. En effet, les mesures effectuées jusqu'ici n'ont été que celles des paramètres intervenant dans la formule fluctuation-dissipation. L'hypothèse est faite que les modes non pris en compte dans le calcul sont négligeables. Une autre hypothèse, a priori, sur le comportement en fréquence de l'angle de pertes doit aussi être avancée (par exemple que ce dernier est constant avec la fréquence).

Un deuxième intérêt est de disposer d'un banc expérimental qui permet de tester des solutions qui permettraient moins de bruit. Ainsi, ce banc n'oblige pas à immobiliser tout l'interféromètre Virgo pour une amélioration éventuelle. Une amélioration progressive de la sensibilité serait ainsi possible.

4.2 Sensibilité à atteindre

Pour améliorer la sensibilité, sur quoi faire porter les efforts ? Pour répondre à cette question, considérons par exemple le rapport signal à bruit du signal espéré de coalescence de binaire, lorsque la masse caractéristique de l'événement est de 1 masse solaire et que cet événement se déroule à 100 Mpc.

Des calculs de sensibilité que j'ai menés en collaboration avec M. Sathyaprakash [64] donnent différents rapports signal à bruit pour différentes configurations des miroirs et de leurs suspensions. L'angle de pertes est supposé constant avec la fréquence. Les fils de suspension sont de type « corde à piano », mais les pertes thermoélastiques ne sont pas prises en compte. Les résultats sont les suivants

Fils de suspension	Substrats des miroirs		rapport signal à bruit
angle de pertes internes	matériau	angle de pertes	
10^{-3}	silice fondue	10^{-6}	0,74
10^{-3}	silice fondue	10^{-7}	2,13
10^{-3}	saphir	10^{-7}	3,00
10^{-4}	saphir	10^{-7}	3,86

Il apparaît qu'une amélioration du bruit thermique des miroirs apporte plus de gain qu'une amélioration du bruit thermique des suspensions (pour ce type de signal, comme on l'a vu, le signal est d'autant plus élevé que sa fréquence est importante ; le signal utile se situe donc surtout dans les fréquences proches de 1 kHz). Une expérience de mesure directe doit donc permettre de mesurer aussi le bruit des modes internes des substrats cylindriques, même si la sensibilité requise est plus difficile à atteindre.

La coalescence de binaires n'est évidemment pas le seul type de signal attendu ; ce calcul a toutefois l'intérêt de mettre en évidence les efforts à fournir. Cela ne veut pas dire non plus qu'il est inintéressant de progresser en basses fréquences, lorsque le bruit pendulaire domine. Au contraire, cela permet d'observer plus de cycles par exemple pour le type de signal évoqué, et donc de connaître avec plus de précision les ordres post-newtonniens.

Prenons le cas d'un fil où les pertes internes sont constantes et égales à 10^{-3} et d'un miroir en silice de pertes constantes égales à 10^{-6} . Il faut construire une expérience capable de mesurer les déplacements d'un miroir, d'une amplitude de

Domaine spectral	Bruit dominant		sensibilité
de 10 à 30 Hz	bruit des suspensions	$\tilde{x} = 5,5 \cdot 10^{-18} \left(\frac{10}{f} \right)^{5/2}$	$\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$
de 30 à 1000 Hz	bruit des miroirs	$\tilde{x} = 5,5 \cdot 10^{-20} \left(\frac{1000}{f} \right)^{1/2}$	$\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$

Cette expérience devant être capable de mesurer la sensibilité de versions avancées de Virgo, il semble raisonnable de se fixer une limite de $1,4 \cdot 10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ de 10 à 1000 Hz pour le bruit d'un miroir, soit une limite de $2 \cdot 10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ pour une cavité.

4.3 Dispositif expérimental

Pour mesurer des déplacements de cet ordre de grandeur, l'utilisation des propriétés optiques d'une cavité résonnante semble la meilleure. L'étude de la faisabilité se focalise donc d'abord sur les propriétés que doit avoir une telle cavité. La configuration mécanique et optique doit être aussi proche que possible de celle de l'interféromètre Virgo pour que les résultats de cette expérience soient applicables immédiatement.

Le principe de mesure est simple : utiliser une cavité résonnante, en transmission ou en réflexion, illuminée par un faisceau laser stabilisé en fréquence. Pour que la mesure ne soit pas sensible aux fluctuations d'amplitude du laser, il faut utiliser les techniques de modulation de fréquence, comme il a été montré au chapitre 2 de la première partie.

La cavité doit bien sûr être suspendue pour s'affranchir du bruit sismique.

Le principe du montage est donc celui représenté en figure 4.1.

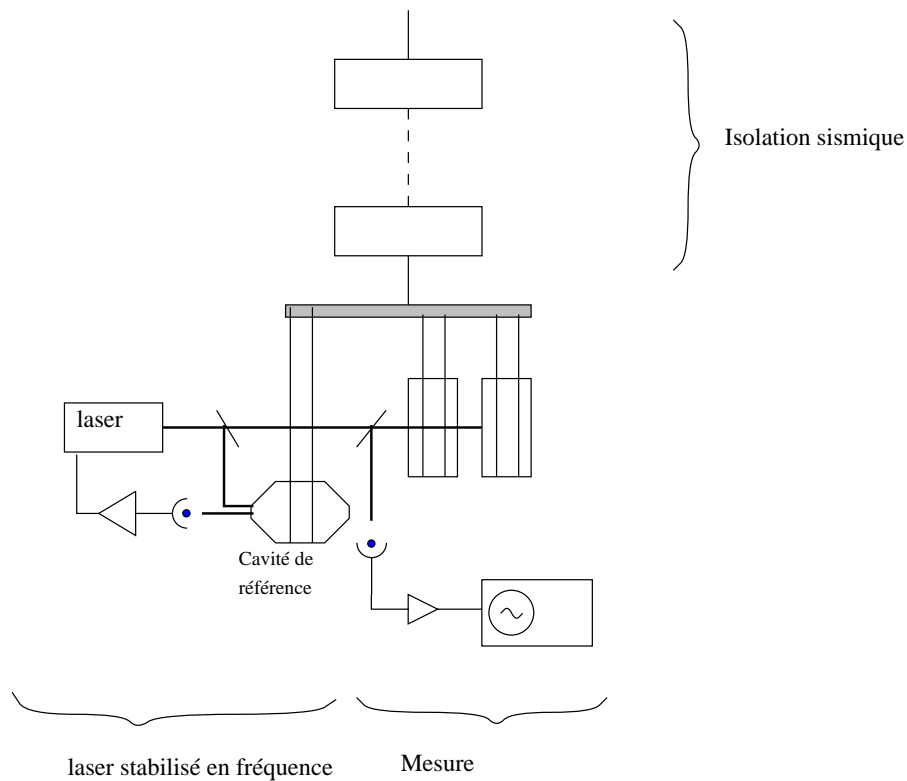


FIG. 4.1 – *Principe du dispositif expérimental d'une mesure directe de bruit thermique*

4.4 Isolation sismique

L'isolation sismique est effectuée par une chaîne de pendules, appelée super-atténuateur dans Virgo. Déterminons le nombre d'étages d'isolation sismique nécessaires. Le bruit sismique de déplacement, au niveau du sol, s'exprime par

$$\tilde{x} = \frac{10^{-6}}{f^2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.1)$$

où f est la fréquence d'analyse. Chaque étage pendulaire apporte une isolation dans le sens horizontal

$$\frac{f_0^2}{f^2} \quad (4.2)$$

où f_0 est la fréquence de résonance du pendule.

Il y a donc besoin de 5 étages d'isolation sismique pour obtenir la sensibilité prévue ci-dessus à 10 Hz. Comme alors le bruit sismique a une pente en f^{-12} , il vient immédiatement que cette isolation est suffisante aux fréquences supérieures.

4.5 Paramètres optiques

Les différents paramètres à déterminer sont la puissance du laser, le col du faisceau, la longueur de la cavité, sa finesse et ses pertes. Il faut également choisir entre les deux schémas possibles, utiliser la cavité en réflexion ou en transmission.

4.5.1 Transmission ou réflexion

Le bruit de photons doit être inférieur au signal à mesurer. Cette contrainte indique qu'il faut optimiser le rapport signal à bruit.

Les notations que nous retenons pour ce calcul sont identiques à celles du chapitre 2 de la première partie. La finesse d'une cavité est notée \mathcal{F} , le paramètre n s'en déduit par $n = \mathcal{F}/\pi$, les pertes p_c se calculent par $p_c = 1 - r_2^2(1 - p_1)$.

A résonance, le champ réfléchi par une cavité est

$$\zeta = np_c - 1 \quad (4.3)$$

et le champ transmis s'exprime par le paramètre t

$$t = nt_1t_2 \quad (4.4)$$

Sensibilité du schéma en réflexion

On utilise la méthode Pound Drever pour s'affranchir des fluctuations de puissance du laser. La fréquence de modulation en fréquence de la lumière du laser est grande devant la largeur de raie de la cavité et petite devant l'intervalle spectral libre.

Le champ réfléchi par une cavité suit la loi

$$\frac{\psi_{\text{ref}}}{\psi_{\text{in}}} = \frac{\zeta + i n \alpha}{1 + i n \alpha} \quad (4.5)$$

où α est l'écart à la frange noire α_0

$$\alpha + \alpha_0 = \frac{4\pi\nu L_c}{c} \quad (4.6)$$

Dans le cas de fluctuations de fréquence du laser incident, le facteur $n\delta\alpha$ s'écrit aussi

$$n\delta\alpha = \frac{\delta\nu}{f_p} \quad (4.7)$$

où f_p est le pôle de la cavité ; dans le cas de fluctuations de longueur de la cavité

$$n\delta\alpha = 4\mathcal{F} \frac{\delta x}{\lambda} \quad (4.8)$$

λ est la longueur d'onde du laser.

L'équation 2.50 de la première partie permet de trouver le signal, valeur efficace de la composante de fréquence f_m :

$$s(t) = \eta P_{\text{in}} \frac{4}{\sqrt{2}} J_0(m) J_1(m) (1 - \zeta) n\delta\alpha \quad (4.9)$$

Le bruit de photons se calcule par

$$n(t) = \sqrt{2\eta P_{\text{DC}} h_p \nu} \quad (4.10)$$

où P_{DC} est la composante continue du signal. Dans l'équation 2.50, seules les premières bandes latérales sont prises en compte. En fait, toutes sont réfléchies et la puissance continue s'écrit

$$P_{\text{DC}} = P_{\text{in}} \left[\zeta^2 J_0^2(m) + 2 \sum_{i \geq 1} J_i^2(m) \right] \quad (4.11)$$

en utilisant $J_0^2(m) + 2 \sum_{i \geq 1} J_i^2(m) = 1$, on obtient

$$P_{\text{DC}} = P_{\text{in}} \left[1 - (1 - \zeta^2) J_0^2(m) \right] \quad (4.12)$$

Le rapport signal à bruit s'exprime donc, pour des fluctuations de longueur, par

$$\rho = \sqrt{\frac{\eta P_{\text{in}}}{h_p \nu}} 2 A 4 \mathcal{F} \frac{\tilde{x}}{\lambda} \quad (4.13)$$

Il faut choisir m, ζ de manière à maximiser le facteur A

$$A = \frac{J_0(m) J_1(m) (1 - \zeta)}{\sqrt{1 - (1 - \zeta^2) J_0^2(m)}} \quad (4.14)$$

Pour chaque ζ , il existe un indice de modulation optimal ; ensuite on choisit la valeur de ζ qui maximise, en valeur absolue, A .

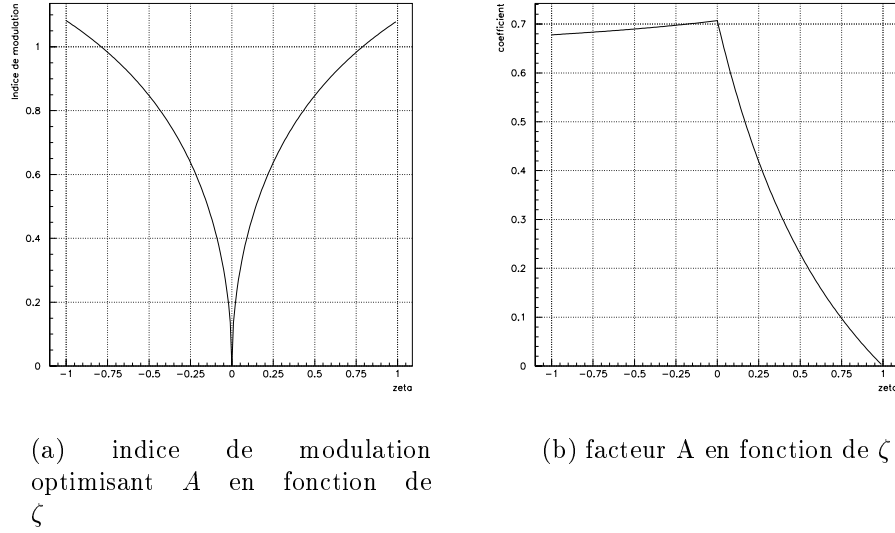


FIG. 4.2 – *Optimisation de l'indice de modulation*

On voit qu'on a intérêt à choisir une cavité sous-couplée ($\zeta \leq 0$), donc à faibles pertes, et un bon contraste ($\zeta \simeq 0$). Le facteur A vaut alors 0,7.

La sensibilité des mesures des variations de longueur de la cavité est donc

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{h_p \nu}{\eta P_{\text{in}}}} \frac{1}{2A} \frac{\lambda}{4\mathcal{F}} \quad (4.15)$$

Donc, avec par exemple une puissance incidente de 100 mW, on a

$$\tilde{x} = 2,60 \cdot 10^{-20} \left(\frac{P_{\text{in}}}{100 \text{ mW}} \right)^{-1/2} \left(\frac{\mathcal{F}}{10000} \right)^{-1} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.16)$$

Une finesse $\mathcal{F} = 13000$ est donc suffisante. Les calculs suivants sont effectués avec cette valeur.

Sensibilité du schéma en transmission

Pour des écarts de phase à la résonance α petits devant l'intervalle spectral libre, la transmission d'une cavité peut s'exprimer par

$$\frac{\psi_t}{\psi_{in}} = \frac{t}{1 + i n \alpha} \quad (4.17)$$

La puissance détectée sur la photodiode est alors

$$P_{out} = P_{DC} + P_1 \sin(\theta_m + \phi) + f_1(\sin(2\theta_m)) + f_2(\cos(2\theta_m)) + \dots \quad (4.18)$$

Un angle ϕ est ajouté : il est plus efficace de faire de la détection d'enveloppe (somme quadratique pondérée des signaux en phase et en quadrature de phase). Le signal est alors

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta P_{in} t^2 4J_0(m)J_1(m) \frac{x_0}{1 + x_0^2} n \delta \alpha \quad (4.19)$$

où x_0 est le rapport de la fréquence de modulation sur le pôle de la cavité. Le bruit s'exprime comme déjà indiqué ci-dessus en fonction de P_{DC} , où

$$P_{DC} = P_{in} t^2 \left[J_0^2(m) + \sum_{j \geq 1} \frac{2J_j^2(m)}{1 + (jx_0)^2} \right] \quad (4.20)$$

Le rapport signal à bruit vaut alors,

$$\rho = \sqrt{\frac{\eta P_{in}}{h_p \nu}} t 2A 4\mathcal{F} \frac{\tilde{x}}{\lambda} \quad (4.21)$$

où t est bien sûr inférieur à 1 et A vaut, en transmission,

$$A = \frac{J_0(m)J_1(m) \frac{x_0}{1+x_0^2}}{\sqrt{J_0^2(m) + \sum_{j \geq 1} \frac{2J_j^2(m)}{1+(jx_0)^2}}} \quad (4.22)$$

Le couple x_0, m qui maximise A est $x_0 = 1,244$ et $m = 1,266$, et alors A vaut 0,203.

Le schéma par réflexion est donc plus sensible que le schéma par transmission.

Nous utiliserons donc la cavité en réflexion, en utilisant la méthode Pound Drever.

4.5.2 Longueur de la cavité

Le laser incident doit être stabilisé en fréquence, comme on l'a vu au chapitre 2 de la première partie. Pour ce faire, on utilise une cavité de référence dont la longueur fournit la stabilité de fréquence désirée. Par exemple, on utilisera une cavité identique à la cavité de

préstabilisation de Virgo (cf. troisième partie de cette thèse). Les fluctuations de fréquence du laser stabilisé $\tilde{\nu}_l$ apparaissent comme un bruit de longueur de la cavité :

$$\tilde{x} = \tilde{\nu}_l \frac{L_c}{\nu} \quad (4.23)$$

Les fluctuations du laser peuvent aussi s'exprimer, de la même manière, en fonction de fluctuations de longueur de la cavité de préstabilisation \tilde{x}_{ps} ; le bruit de fréquence du laser stabilisé apparaît donc comme un bruit de longueur

$$\tilde{x} = \tilde{x}_{ps} \frac{L_c}{L_{ps}} \quad (4.24)$$

Par exemple, avec une cavité de 1 cm, le bruit de fréquence mesuré de la cavité de préstabilisation amène le bruit suivant :

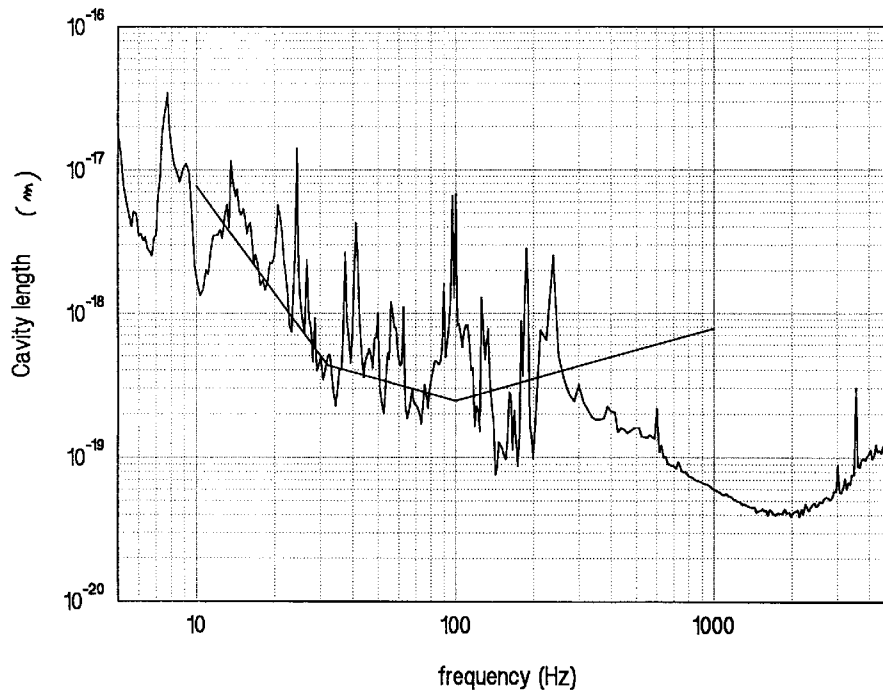


FIG. 4.3 – Longueur de la cavité et stabilisation de fréquence - la courbe par segments est la sensibilité voulue, l'autre le bruit de fréquence mesuré rapporté en bruit de longueur

En fait, le bruit sera probablement meilleur : la plupart des pics sont dus à un effet Doppler qui n'aura pas lieu si l'isolation sismique est meilleure que dans la mesure de stabilité de fréquence, et ce sera le cas avec une chaîne complète d'isolateurs sismiques. Par ailleurs, si la température de la cavité de référence est gardée aux environs de 20° C, les dérives à long terme seront minimisées et le bruit de fréquence du laser en $1/f$ peut être atténué (voir dernier chapitre).

Une cavité de longueur 1 cm, ou mieux de quelques millimètres, devrait donc suffire vu la stabilité de fréquence escomptée pour le laser incident. Pour la suite, on suppose une cavité de 1 cm.

4.5.3 Propriétés des miroirs

La finesse de la cavité de mesure du bruit thermique est $\mathcal{F} = 13000$. Sa longueur est 10 mm ; l'intervalle spectral libre est donc 15 GHz. Le pôle de la cavité est alors $f_p = 577$ kHz.

Avec une cavité où $r_2 = r_{\max} = 1$, la condition de sous-couplage s'exprime par une condition sur les pertes dans le miroir d'entrée

$$p_1 < \frac{\pi}{\mathcal{F}} \quad (4.25)$$

Ce qui est aisément réalisable. Si $r_1 = r_2$, alors la condition de sous-couplage ne peut pas être vérifiée. En fait, aucune égalité n'est stricte ; mais la réflectivité du miroir de renvoi doit être beaucoup plus élevée que celle du miroir d'entrée pour que la condition de sous-couplage soit vérifiée.

4.5.4 Propriétés du faisceau

Deux types de cavités sont réalisables : les cavités où les deux miroirs sont plans et les cavités où un des miroirs est courbe. Il existe aussi des cavités optiques courbe-courbe, mais les résultats ne sont pas fondamentalement différents des cavités plan-courbe.

Les cavités plan-plan ont plusieurs inconvénients : les modes sont dégénérés (tous sont résonnants), et la rugosité empêche des finesse supérieures à quelques centaines [65]. La dégénérescence des modes rend les problèmes d'alignement beaucoup plus délicats.

On retient donc une cavité plan-courbe.

La taille du faisceau est déterminée par trois critères

- la cavité ne doit pas être dégénérée,
- la courbure du miroir de renvoi doit être réalisable,
- l'intensité du faisceau devrait être de l'ordre de grandeur d'intensités déjà atteintes dans d'autres expériences.

Le premier critère facilite l'alignement de la cavité, et donne des critères optiques plus faciles à manier. Le filtrage de modes permet alors l'alignement de la cavité. Le deuxième critère est sur la réalisation mécanique des substrats des miroirs. Si l'incertitude sur la

courbure est trop élevée, la finesse par exemple risque d'être notablement différente de celle attendue. Le troisième critère enfin permet d'éviter d'endommager les miroirs ou les couches diélectriques posées dessus par des intensités trop fortes.

Pour utiliser une cavité plan-courbe, on peut soit utiliser les miroirs de Virgo tels qu'ils sont, soit contacter optiquement des miroirs sur les surfaces. L'inconvénient de cette deuxième solution est que les effets de ce contact optique sur les modes de vibration des substrats cylindriques et sur l'angle de pertes internes du substrat ne sont pas connus. On risque donc de s'éloigner d'une expérience permettant effectivement de mesurer et d'améliorer la sensibilité de Virgo.

On retient donc le choix d'une cavité utilisant les même miroirs que les grandes cavité Fabry Perot de Virgo. La courbure du miroir de renvoi étant de 3450 m [21], la taille du col du faisceau est alors de 1,41 mm, en utilisant

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{L_c(R - L_c)} \quad (4.26)$$

où w_0 est la taille du col du faisceau, R la courbure du miroir de renvoi. La puissance stockée dans la cavité P_{sto} vaut $P_{\text{sto}} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} P_{\text{in}}$, si les pertes dans le miroirs d'entrée sont suffisamment faibles, et si le miroir de renvoi a une réflectivité maximum. Alors $P_{\text{sto}} = 828$ Watts pour une puissance incidente de 100 mW, et l'intensité du faisceau $I = P_{\text{sto}}/(\pi w^2) = 132$ W/mm². Par comparaison, dans les cavités de Virgo on a environ 8 W/mm² et dans la cavité de référence utilisée pour la préstabilisation il a été imposé jusqu'à 3 kW/mm².

La non-dégénérescence d'une cavité exprime que les modes qui ont des profils d'intensité différents résonnent à des fréquences différentes. L'écart par rapport à la résonance du mode TEM₀₀ s'exprime par

$$\alpha_{mn} = 2(m + n) \arctan\left(\frac{\lambda L_c}{\pi w_0^2}\right) \quad (4.27)$$

où m et n caractérisent les modes d'Hermite-Gauss [66]. On voudrait donc que les modes $m + n \leq 5$ par exemple ne soient pas résonnants, c'est-à-dire tels que

$$|\alpha_{mn}| > \frac{\pi}{\mathcal{F}} \quad (4.28)$$

où α_{mn} est exprimé sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Avec les données retenues, on trouve $\alpha_{01} = 3,4 \cdot 10^{-3}$, qui vérifie bien la condition ci-dessus. Par ailleurs, l'angle α_{01} étant faible dans notre cas, il y aura de très nombreux modes filtrés.

4.6 Perspectives

Les éléments optiques pour la réalisation de l'expérience sont posés. Il reste à étudier les tolérances sur les éléments donnés ici, par exemple si des finesse élevées sont possibles dans de telles cavités. La faisabilité de l'expérience en termes d'alignements reste également à analyser.

Troisième partie

Stabilisation en fréquence du laser

Chapitre 1

Principes pour la stabilisation en fréquence du laser

1.1 Intérêt de la stabilisation en fréquence

1.1.1 Intérêt pour détecter des ondes gravitationnelles

Comme nous l'avons vu au deuxième chapitre de la première partie, une fluctuation de fréquence du laser simule une onde gravitationnelle si l'interféromètre n'est pas parfaitement symétrique :

$$h_n(t) = \beta \frac{\delta\nu(t)}{\nu_{\text{opt}}} \quad (1.1)$$

où β est l'asymétrie entre les deux bras de l'interféromètre (de l'ordre de 1 %), et $\delta\nu_{\text{opt}}$ une fluctuation de fréquence de la lumière qui illumine les cavités Fabry Perot.

Virgo est construit de façon à ce que le bruit de fréquence du laser ne limite pas la sensibilité de l'interféromètre. Les fluctuations de fréquence doivent donc être inférieures à

$$\tilde{\nu} < \frac{1}{\beta} \nu_{\text{opt}} \tilde{h}_n \quad (1.2)$$

où \tilde{h}_n est le seuil de sensibilité de l'interféromètre à la fréquence de Fourier f , cette sensibilité étant limitée par le bruit thermique et le bruit de photons.

1.1.2 Intérêt pour une mesure directe de bruit thermique

Dans une mesure directe de bruit thermique, on cherche à mesurer les variations de longueur d'une cavité de façon très précise. En utilisant une cavité Fabry Perot, on mesure une

phase : il faut que cette dernière ne dépende que des variations de longueur et non pas des variations de fréquence de l'onde incidente. Les fluctuations doivent donc être inférieures à

$$\tilde{\nu}_{\text{opt}} < \tilde{x} \frac{\nu_{\text{opt}}}{L_c} \quad (1.3)$$

où \tilde{x} est la sensibilité aux mesures de longueur désirée.

1.1.3 Intérêt pour la métrologie des fréquences, des temps et des longueurs

La stabilisation en fréquence d'oscillateurs est nécessaire pour la définition d'étalons de temps (horloges), d'étalons de mesure de longueur (règles).

Les standards primaires de fréquences sont aujourd'hui définis par des oscillateurs dont la fréquence est asservie sur des transitions atomiques. Pour améliorer la précision de ces étalons, il faut interroger des raies de plus en plus étroites. Pour ce faire, le faisceau de test doit lui-même avoir une raie très étroite. Une solution est d'asservir la fréquence de ce faisceau sur la longueur d'une cavité optique dont la stabilité à court terme est excellente.

Les progrès en métrologie rendent possible, par exemple, des expériences de test de la relativité générale : pour tester la structure de l'espace-temps, il faut des métronomes et des règles dont le comportement s'approche le plus possible des outils de mesure idéaux, au centre des « Gedanken Experiments » chères à A. Einstein.

1.2 Principe

1.2.1 Asservissement sur la longueur d'une cavité

On considère par la suite l'asservissement de la fréquence d'un faisceau laser sur la longueur d'une cavité optique Fabry Perot. A l'intérieur de la bande de fréquences de l'asservissement (cf annexe B), les variations de fréquence suivront les variations de longueur de la cavité de référence. On peut résumer la situation par le schéma classique d'asservissement ci-après :

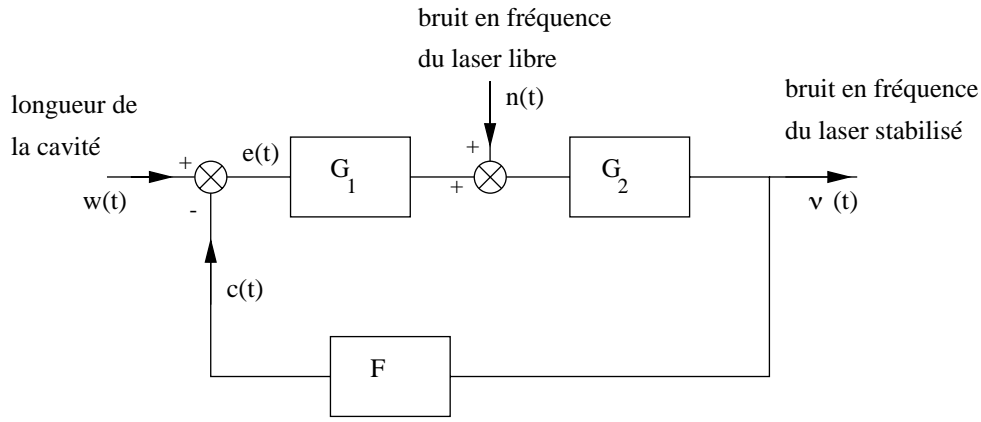


FIG. 1.1 – Schéma de principe de l'asservissement de la fréquence d'un laser sur la longueur d'une cavité

La consigne $w(t)$ dans un schéma équivalent d'asservissement est la longueur de la cavité Fabry Perot. Cette longueur est idéalement fixe ; en fait, elle subit des variations dues aux bruits internes de longueur de la cavité (bruit sismique, bruit thermique, dilatations). Le signal de sortie est la fréquence $\nu(t)$ stabilisée de l'oscillateur. Le bruit en fréquence $n(t)$ de l'oscillateur non asservi vient comme un bruit. Le signal de sortie est utilisé pour calculer la correction $c(t)$. La comparaison de la correction et du signal de commande permet le calcul du signal d'erreur $e(t)$. Les gains des différents éléments permettent la conception de l'asservissement (fréquence de gain unité, fonction de transfert en boucle ouverte). Ils prennent aussi en compte les éléments qui permettent de faire les conversions fréquence optique/tension électrique et tension électrique/fréquence optique, ainsi que la propriété de filtrage en fréquence d'une cavité. Le filtre passe-bas de fréquence qu'est la cavité est caractérisé par son pôle f_P . Les sources de bruits (électronique, bruit de photons) ne sont pas prises en compte dans la représentation très schématique ici.

Les équations qui régissent l'asservissement sont donc :

$$e = w - F\nu \quad (1.4)$$

$$\nu = G_2 n + G_1 G_2 e \quad (1.5)$$

Il vient immédiatement

$$\nu = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 F} w + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 F} n \quad (1.6)$$

Soit G_{bo} le gain en boucle ouverte défini par

$$G_{bo} = G_1 G_2 F \quad (1.7)$$

et G_{bf} le gain en boucle fermée défini par

$$G_{bf} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 F} \quad (1.8)$$

Pour les fréquences de Fourier plus petites que le gain unité, $G_{bo} \gg 1$, $G_1 \gg 1$, et le retour F est de l'ordre de l'unité. La sortie $\nu(t)$ suit donc la commande $w(t)$; ses variations seront d'autant plus petites que la référence est stable.

1.2.2 La technique Pound Drever

La fréquence est corrigée en utilisant un montage dont le principe est le suivant :

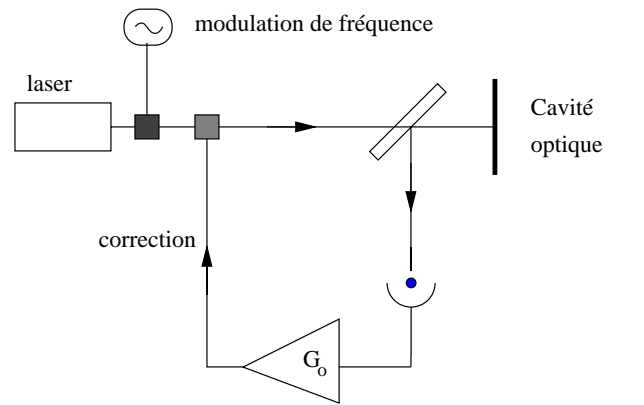


FIG. 1.2 – Utilisation de la technique Pound Drever pour la correction de fréquence

Un faisceau laser modulé en fréquence à la fréquence f_m est envoyé sur une cavité optique ; le faisceau réfléchi est recueilli sur une photodiode. Le courant dans la photodiode est démodulé de façon synchrone. La cavité opère comme un discriminateur de fréquence : la différence de fréquence entre l'onde incidente et la référence de fréquence que constitue sa longueur produit des bandes latérales à $\pm f_m$ de la puissance recueillie sur la photodiode d'amplitude proportionnelle à l'écart de fréquence.

Le signal Pound Drever établit un signal d'erreur. Ce signal électrique est envoyé dans un amplificateur qui permet de construire la fonction de transfert désirée (gain, fréquence de gain unité).

La correction est appliquée par un élément permettant de corriger la phase d'un faisceau laser : cristal électro-optique, ou bien cristal acousto-optique, ou bien un miroir dont la position est animée par une céramique piezo-électrique.

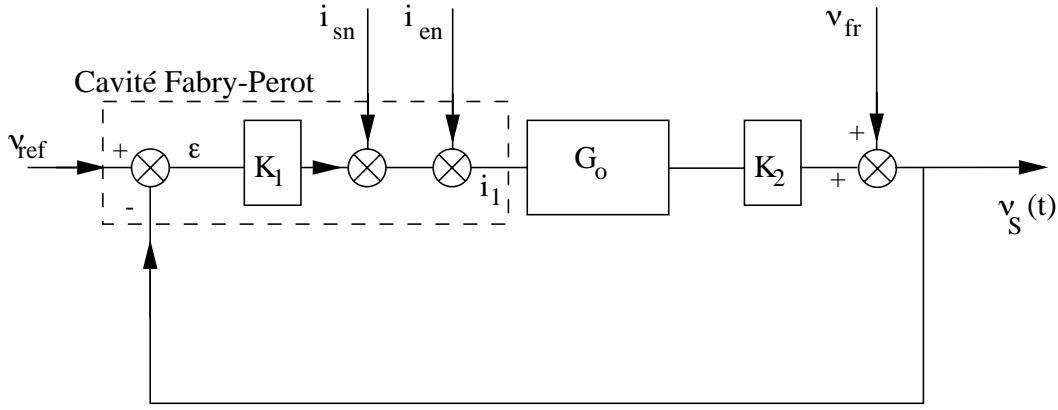


FIG. 1.3 – Schéma de l'asservissement de la fréquence, en utilisant la technique Pound Drever

La référence de longueur d'une cavité est convertie simplement en référence de fréquence par

$$\delta\nu_{ref}(t) = \delta L_c(t) \frac{\nu_{opt}}{L_c} \quad (1.9)$$

La cavité compare la référence de fréquence et le faisceau laser incident ; en l'absence de bruit la photodiode traduit cette référence en signal électrique

$$i_1(t) = \frac{e\eta P_{in}}{h_p \nu_{opt}} \frac{4}{\sqrt{2}} J_0(m) J_1(m) (1 - \zeta) \frac{\epsilon}{f_P} \quad (1.10)$$

où on a repris les notations du chapitre 2 de la première partie, e est la charge de l'électron. ϵ est le signal d'erreur, $\epsilon = \nu_{ref} - \nu_S$. Notons

$$\gamma = \frac{e\eta}{h_p \nu_{opt}} \quad (1.11)$$

la conversion courant / puissance de la photodiode ; celle-ci vaut $\gamma = 0,86$ A/W si $\eta = 1$. Le coefficient K_1 du schéma s'écrit

$$K_1 = \gamma P_{in} \frac{4}{\sqrt{2}} J_0(m) J_1(m) (1 - \zeta) \frac{1}{f_P} \quad \left[\text{A/Hz} \right] \quad (1.12)$$

On voit donc l'intérêt d'utiliser des cavités de finesse élevées : plus la finesse est grande, plus le pôle de la cavité est faible et ainsi le gain K_1 est important. Le bruit électronique aura donc moins d'importance.

Le bruit de photons s'exprime, en densité spectrale, par $\tilde{i}_{sn} = \sqrt{2eI_{DC}}$ où I_{DC} est le courant continu dans la photodiode ; d'où

$$\tilde{i}_{sn} = \sqrt{2e\gamma P_{in}} \sqrt{1 - (1 - \zeta^2) J_0^2(m)} \quad (1.13)$$

On peut définir le contraste par $C = (1 - \zeta^2)/(1 + \zeta^2) = (P_{\max} - P_{\min})/(P_{\max} + P_{\min})$. On obtient alors

$$\tilde{i}_{sn} = 4.10^{-10} \left(\frac{\gamma}{0,5 \text{ A/W}} \right)^{1/2} \left(\frac{P_{\text{in}}}{1 \text{ W}} \right)^{1/2} \sqrt{1 - (1 - \zeta^2) J_0^2(m)} \text{ A}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (1.14)$$

\tilde{i}_{en} permet de prendre en compte, si besoin, le bruit de fond de l'électronique, ramené en entrée des amplis. G_o est le gain de l'électronique; il prend en compte le facteur de conversion apporté par le démodulateur synchrone. K_2 prend en compte la conversion courant/fréquence du modulateur de phase. Cette fonction peut, physiquement, être réalisée par plusieurs éléments, suivant leur dynamique et leur gamme de travail en fréquence. $\tilde{\nu}_{fr}$ est le bruit de fréquence du laser libre.

Lorsque la boucle d'asservissement est fermée, on a, en posant $G = K_1 G_o K_2$

$$\tilde{\nu}_S = \frac{G}{1+G} \tilde{\nu}_{ref} + \frac{1}{K_1} \frac{G}{1+G} (\tilde{i}_{sn} + \tilde{i}_{en}) + \frac{1}{1+G} \tilde{\nu}_{fr} \quad (1.15)$$

Pour des fréquences inférieures au gain unité, si les bruits électroniques et de photons sont suffisamment faibles, $G \gg 1$ et donc la fréquence de sortie suit la référence.

Le signal d'erreur i_1 mesuré sur la photodiode est

$$\tilde{i}_1 = K_1 \frac{1}{1+G} (\tilde{\nu}_{ref} + \frac{1}{G} \tilde{\nu}_{fr}) + \frac{1}{1+G} (\tilde{i}_{sn} + \tilde{i}_{en}) \quad (1.16)$$

Pour des fréquences inférieures au gain unité, la mesure du signal d'erreur est limitée par le bruit de l'amplificateur qui vient lire la valeur de $i_1(t)$.

1.3 La stabilisation de fréquence dans Virgo

1.3.1 Stabilité de fréquence requise

De quelle stabilité de fréquence y a-t-il besoin pour le laser qui éclaire l'interféromètre Virgo?

Le spectre de sensibilité \tilde{h}_n de Virgo, en supposant une amélioration du bruit thermique des miroirs, peut s'approximer par

sensibilité \tilde{h} ($/\sqrt{\text{Hz}}$)	intervalle de fréquence (Hz)
$3.10^{-21} (10/f)^2$	10–100
3.10^{-23}	100–600
$3.10^{-23} (f/600)^2$	600–10000

f est la fréquence de Fourier d'analyse de la fréquence (en Hz).

Le faisceau incident sur les cavités Fabry Perot de 3 km doit donc avoir un bruit de fréquence maximum,

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\beta} \nu_{\text{opt}} \tilde{h}_n \quad (1.17)$$

Et avec un facteur d'asymétrie $\beta = 10^{-2}$, cela donne

bruit de fréquence (Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$)	intervalle de fréquence
$8,54 \cdot 10^{-5} \quad (10/f)^2$	10–100
$8,54 \cdot 10^{-7}$	100–600
$8,54 \cdot 10^{-7} \quad (f/600)$	600–10000

Des filtres de fluctuations de fréquence sont utilisés. Ces filtres sont des cavités optiques qui se comportent comme des filtres passifs passe-bas du premier ordre. Rappelons la définition de la fréquence de coupure, vue au 2^e chapitre :

$$f_P = \frac{\text{ISL}}{2\mathcal{F}} \quad (1.18)$$

Deux cavités remplissent ce rôle : la cavité « Mode-Cleaner » de 144 m, dont le pôle est à 600 Hz ; l'interféromètre avec recyclage, dont le pôle est à 5 Hz (cf. partie 1, formule 2.97).

Les fluctuations de fréquence incidentes sur l'interféromètre $\tilde{\nu}_S$ doivent donc, au maximum, valoir

bruit de fréquence (Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$)	intervalle de fréquence
$3,4 \cdot 10^{-4} \quad (5/f)$	10–100
$1,69 \cdot 10^{-5} \quad (f/100)$	100–600
$1,01 \cdot 10^{-4} \quad (f/600)^3$	600–10000

1.3.2 Asservissement en deux étages

Le laser utilisé dans Virgo a un bruit de fréquence, en fonctionnement libre, de

$$\tilde{\nu}_{fr} \approx 100 \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right) \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (1.19)$$

Les fluctuations maximales de fréquence permises pour le laser qui illumine l'interféromètre sont répertoriées dans le tableau ci-dessus. Il reste donc 6 ordres de grandeurs à gagner à 10 Hz, et 4 à 10 kHz, pour que la stabilité en fréquence du laser puisse permettre de détecter des ondes gravitationnelles.

Il faut donc trouver, pour asservir le laser en fréquence, une référence de fréquence extrêmement stable. Or il existe une référence de longueur qui a ce niveau de stabilité :

les cavités Fabry Perot de 3 km de Virgo. Plus précisément, la lumière réfléchiée par l'interféromètre possède cette stabilité.

Quelles pourraient être les caractéristiques d'un asservissement de la fréquence sur la lumière réfléchiée par l'interféromètre? Les cavités ont une longueur de 3 km, on rencontre donc une résonance tous les 50 kHz (intervalle spectral libre). La fréquence de gain unité de l'asservissement peut être de l'ordre du tiers de cette valeur, disons 15 kHz. La pente du gain en boucle ouverte ne peut dépasser $f^{-3/2}$ à 15 kHz, et le gain devrait être de 4 ordres de grandeur à 10 kHz : c'est impossible à réaliser.

L'idée est donc d'asservir la fréquence en deux étapes [67, 68]. La fréquence est d'abord asservie sur une petite cavité, rigide. L'intervalle spectral libre de celle-ci étant élevé (475 MHz), un gain unité élevé (1 MHz) est possible, et plusieurs ordres de grandeurs sont gagnés, même à 10 kHz. Cette cavité courte ne peut pas suffire, et n'a pas la précision suffisante : son bruit de longueur (sismique, bruit thermique) comme nous le verrons dans le chapitre suivant, est trop important. La lumière en réflexion de l'interféromètre est nécessaire pour la stabilisation finale de fréquence.

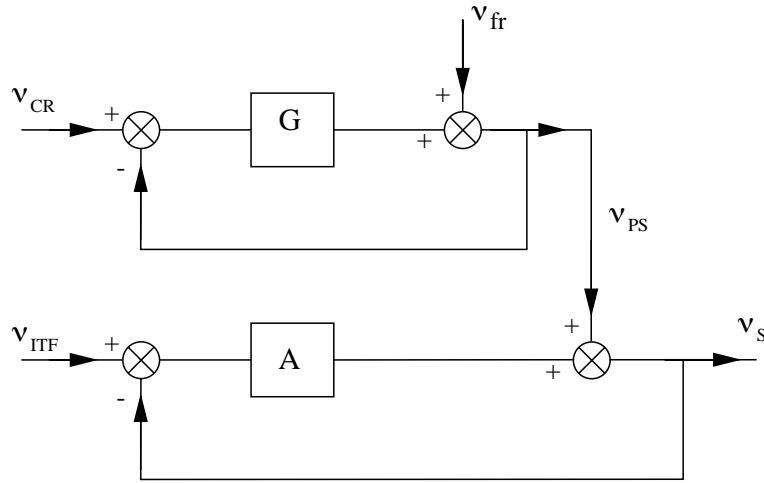


FIG. 1.4 – *Principes de la stabilisation de Fréquence dans l'interféromètre Virgo*

Il vient immédiatement

$$\tilde{v}_{PS} = \frac{G}{1+G} \tilde{v}_{CR} + \frac{1}{1+G} \tilde{v}_{fr} \quad (1.20)$$

$$\tilde{v}_S = \frac{A}{1+A} \tilde{v}_{ITF} + \frac{1}{1+A} \tilde{v}_{PS} \quad (1.21)$$

Soit encore

$$\tilde{v}_S = \frac{A}{1+A} \tilde{v}_{ITF} + \frac{G}{1+G+A+AG} \tilde{v}_{CR} + \frac{1}{1+G+A+AG} \tilde{v}_{fr} \quad (1.22)$$

$\tilde{\nu}_{CR}$ est la référence de fréquence donnée par la petite cavité rigide, appelée « cavité de référence ». $\tilde{\nu}_{PS}$ sont les fluctuations de fréquence du faisceau laser « préstabilisé » par la cavité de référence. $\tilde{\nu}_{TF}$ est la référence de fréquence donnée par la lumière réfléchie par l'interféromètre; $\tilde{\nu}_S$ sont les fluctuations de fréquence du faisceau incident sur l'interféromètre.

Pour la conception des fonctions de transfert en boucle ouverte, partons du dernier étage. Nous faisons l'hypothèse que la fréquence de gain unité de A est 15 kHz, et que la fonction de transfert en boucle ouverte A est définie par les gains

gain	intervalle de fréquence (Hz)
20000 $(f/5)^3$	5–40
10^7 $(40/f)^3$	40–5000
5, 2 $(5000/f)^{3/2}$	5000–15000

Avec l'équation 1.22, le bruit de fréquence de l'étage préstabilisé a donc un niveau maximal de

bruit de fréquence (Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$)	intervalle de fréquence
6, 7 $(f/5)^2$	5–40
429 $(f/40)^{-4}$	40–100
11 $(f/100)^{-2}$	100–600
0, 31	600–5000
0, 31 $(f/5000)^{3/2}$	5000–15000

La fonction de transfert en boucle ouverte G de l'étage de stabilisation de la fréquence sur la cavité de préstabilisation est définie par la fréquence de gain unité (1 MHz) et les gains suivants :

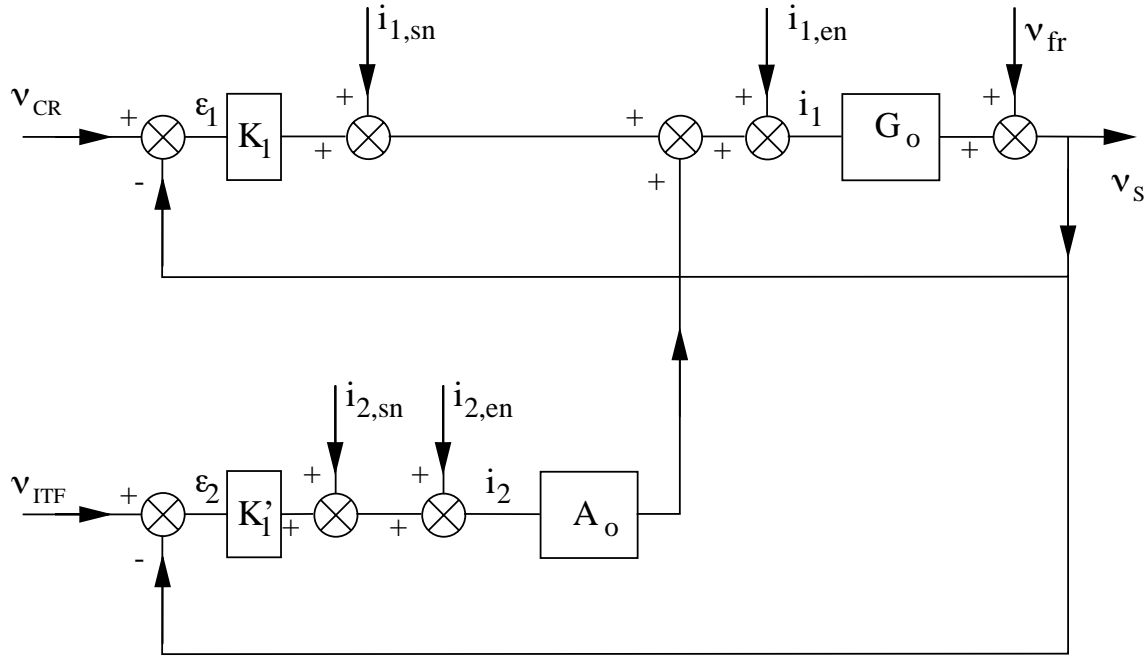
gain	intervalle de fréquence (Hz)
$1, 3 \cdot 10^{19}$ $(5/f)^5$	0–1500
$5, 3 \cdot 10^6$ $(1500/f)^4$	1500–30 kHz
33 $(3 \cdot 10^4/f)$	30 kHz–1 MHz

L'étage de préstabilisation n'a qu'un à deux ordres de grandeur à obtenir, à 600 Hz. Sa fréquence de gain unité étant de 1 MHz, cela est largement possible, du point de vue des gains électroniques.

Il reste à prouver que la cavité de préstabilisation a, par elle-même, la stabilité de fréquence suffisante : c'est l'objet du chapitre suivant.

1.3.3 Autre schéma d'asservissement

Pour simplifier l'implantation optique, la réalisation effective des deux boucles d'asservissement de fréquence se fait en suivant le schéma

FIG. 1.5 – *Asservissement de fréquence en deux étages dans Virgo*

Les fonctions de transfert A_o et G_o sont les mêmes que précédemment. Vérifions que le comportement est le même. Posons $G = K_1 G_o$ et $A = A_o K'_1 / K_1$. Si l'on ne tient pas compte des bruits, on obtient

$$\epsilon_1 = \nu_{CR} - \nu_S \quad (1.23)$$

$$\epsilon_2 = \nu_{ITF} - \nu_S \quad (1.24)$$

$$\nu_s = G\epsilon_1 + A G \epsilon_2 + \nu_{fr} \quad (1.25)$$

D'où

$$\tilde{\nu}_S = \frac{AG}{1 + G + AG} \tilde{\nu}_{ITF} + \frac{G}{1 + G + AG} \tilde{\nu}_{CR} + \frac{1}{1 + G + AG} \tilde{\nu}_{FR} \quad (1.26)$$

En très basses fréquences et en continu, $G \gg 1$, $A \ll 1$, $\tilde{\nu}_S \approx \tilde{\nu}_{CR}$: les fluctuations de fréquence suivent les fluctuations de longueur de la cavité de préstabilisation.

Dans le domaine de détection de l'interféromètre, $A \gg 1$ et $G \gg 1$, donc $\tilde{\nu}_S \approx \tilde{\nu}_{ITF}$: c'est la stabilité en longueur de l'interféromètre qui donne la stabilité de fréquence au laser qui l'illumine.

Dans le domaine de fréquence $15 \text{ kHz} < f < 1 \text{ MHz}$, $G \gg 1$, $A \ll 1$, et alors $\tilde{\nu}_S \approx \tilde{\nu}_{CR}$: c'est la cavité de référence qui permet d'augmenter le gain même à 10 kHz.

Le comportement est donc identique au cas où les deux boucles d'asservissement sont cascades.

1.3.4 Bruits

Évaluons maintenant l'effet des bruits, en particulier recherchons les puissances optiques minimales qui doivent frapper les photodiodes pour que le bruit de photons ne limite pas la stabilité de fréquence.

Le calcul de la fonction de transfert tenant compte des bruits donne, en posant $\tilde{i}_{2,n} = \tilde{i}_{2,sn} + \tilde{i}_{2,en}$ et $\tilde{i}_{1,n} = \tilde{i}_{1,sn} + \tilde{i}_{1,en}$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_S = & \frac{AG}{1+G+AG} \tilde{\nu}_{ITF} + \frac{G}{1+G+AG} \tilde{\nu}_{CR} + \frac{1}{1+G+AG} \tilde{\nu}_{FR} \\ & + \frac{1}{K_1} \frac{G}{1+G+AG} \tilde{i}_{1,n} + \frac{1}{K'_1} \frac{AG}{1+G+AG} \tilde{i}_{2,n} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Pour que le bruit (électronique et de photons) soit négligeable dans la bande de détection, il faut

$$\tilde{i}_{1,n} < K_1 \tilde{\nu}_{CR} \quad (1.28)$$

$$\tilde{i}_{2,n} < K'_1 \tilde{\nu}_{ITF} \quad (1.29)$$

En faisant l'hypothèse que chacune des cavités est équivalente à une cavité Fabry Perot définie par le paramètre $\zeta = \psi_{\text{ref}}/\psi_{\text{in}}$ à résonance et par son pôle f_P , ces équations sont équivalentes à (pour un rapport signal à bruit égal à 1)

$$\sqrt{P_{\text{in}}} > \sqrt{\frac{e}{\gamma} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - (1 - \zeta^2) J_0^2(m)}}{J_0(m) J_1(m) (1 - \zeta)} \frac{f_P}{\tilde{\nu}}} \quad (1.30)$$

où P_{in} est la puissance incidente sur la cavité. On reconnaît le facteur dépendant des fonctions de Bessel et du couplage ζ de la cavité étudié dans le chapitre précédent. La fréquence de coupure f_P vaut 8000 Hz pour la cavité de préstabilisation, 5 Hz pour l'interféromètre. $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{CR}$ pour la cavité de préstabilisation, $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{ITF}$ pour l'interféromètre.

Cavité de préstabilisation

Dans le cas de la cavité de préstabilisation, le contraste de la cavité est $C = 0,6$ (voir chapitre suivant); elle est probablement sur-couplée donc $\zeta = +0,5$. Dans les figures 4.2 du chapitre précédent, on peut lire la valeur de

$$A = \frac{J_0(m) J_1(m) (1 - \zeta)}{\sqrt{1 - (1 - \zeta^2) J_0^2(m)}} = 0,8 \quad (1.31)$$

$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{CR}$ et vaut 0,3 Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$ au minimum. En se mettant une marge d'un facteur 10 (bruit de photons correspondant à 0,03 Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$ au maximum), l'équation 1.30 donne

$$P_{\text{in}} > 9.10^{-9} W \quad (1.32)$$

Ce qui est très facilement réalisable. En prenant, avec une large marge, une puissance incidente de 10 mW, la puissance réfléchie est alors 6,2 mW et le bruit de photons correspondant $\tilde{i}_{1,n} = \sqrt{2e\gamma P_{\text{ref}}}$ vaut

$$\tilde{i}_{1,n} = 3.10^{-11} \text{ A}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (1.33)$$

Le bruit électronique ramené à l'entrée des amplificateurs devrait être inférieur à cette valeur.

Interféromètre

Cherchons maintenant la puissance minimale incidente sur l'interféromètre pour ne pas être gêné par le bruit de photons dans la stabilisation de fréquence.

Assimilons d'abord l'interféromètre à une cavité simple ; la fréquence est asservie en utilisant la méthode Pound Drever avec la lumière réfléchie. Le contraste de l'interféromètre à recyclage en réflexion n'est pas connu ; il dépend des pertes. Faisons l'hypothèse d'une cavité sous-couplée (ou même au couplage optimal), ce qui est possible si les pertes dans le miroir de recyclage sont faibles. Le facteur A vaut alors approximativement 0,7. Le bruit de fréquence minimal de la lumière incidente sur l'interféromètre est, comme on l'a vu, $10^{-4} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$ si l'on tient compte du « Mode-Cleaner » et de la cavité de recyclage. ν_{ITF} , en réflexion de l'interféromètre, est filtré par les cavités de recyclage et de « Mode-Cleaner ». La valeur ν_{ITF} à faire intervenir dans le calcul est donc égale à celle des fluctuations de fréquence devant les cavités de 3 km, soit $9.10^{-7} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$. On obtient alors la valeur de la puissance incidente sur l'interféromètre

$$P_{\text{in}} > 50 \text{ mW}. \quad (1.34)$$

Il faut prévoir une puissance plus élevée pour que le bruit de photons reste négligeable. La puissance incidente sur l'interféromètre est de 20 W ; le bruit de photons ne paraît donc pas limiter la stabilité de fréquence.

En fait, la situation est plus complexe. En particulier, le gain de recyclage n'est pas complètement fixé. Il dépend des pertes dans les différents éléments optiques, des distorsions de front d'onde qui seront mesurées plus tard. De plus, les bandes latérales ne sont pas complètement réfléchies comme le suppose la méthode Pound Drever. En effet, on a besoin de celles-ci pour la démodulation du signal en sortie, sur la photodiode de détection du signal d'onde gravitationnelle. Elles sont donc résonnantes dans la cavité de recyclage. Il sera prudent, lors de la définition finale des paramètres, de vérifier qu'une part non négligeable des bandes latérales est réfléchie, fournissant ainsi un signal d'erreur pour l'asservissement de la fréquence.

1.4 Conclusion

Le schéma de stabilisation de fréquence dans l'interféromètre Virgo permet de rendre les fluctuations de fréquence négligeables devant un signal d'onde gravitationnelle. L'utilisation des propriétés de filtrage des cavités optiques résonnantes (« Mode-Cleaner », cavité de recyclage) avant les cavités de 3 km permet de réduire les performances attendues des deux étages de stabilisation nécessaires. Le bruit de photons peut être rendu négligeable, et le bruit de fond des amplificateurs électroniques réduit en dessous du seuil où il gêne la stabilité de fréquence.

Il reste à prouver que les cavités qui jouent le rôle de référence de fréquence ont effectivement les propriétés attendues. Pour l'interféromètre lui-même, cela pourra être fait lors de sa réalisation. Pour la cavité de référence, c'est l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre 2

Expérience de stabilisation en fréquence du laser

2.1 Objectifs

L'expérience de stabilisation en fréquence menée à Orsay avait pour objectifs de :

- construire et tester le premier étage de stabilisation en fréquence du laser de l'interféromètre Virgo (cf. chapitre précédent),
- vérifier que la cavité de référence conçue à cet effet possède un niveau suffisant de stabilité
- mettre au point les boucles d'asservissement et les automatismes
- mesurer les fluctuations de fréquence, les dérives sur le long terme.

Cette expérience est en cours depuis plusieurs années à Orsay. Mon travail a été de réaliser la version finale de l'expérience, corriger les derniers éléments pour atteindre les performances attendues, et enfin faire les mesures de stabilité qui valident le système [69, 70, 71].

2.2 Principes de l'expérience

Il s'agit d'asservir en fréquence un faisceau laser en utilisant la technique Pound Drever, comme on l'a vu dans le chapitre précédent. La cavité optique utilisée à cet effet est une référence de fréquence : elle permet l'asservissement de la fréquence à ses fluctuations de longueur. Elle doit donc être extrêmement stable. Le matériau et la forme sont choisis en conséquence, comme nous le montrerons.

Pour mesurer les fluctuations de fréquence résiduelles, une simple boucle d'asservissement ne suffit pas. En effet, seul le signal d'erreur est alors disponible ; mais sa valeur ne donne pas le niveau absolu de fluctuations de fréquence. Pour mesurer celles-ci, il faut un étalon de fréquences aussi bon que les fluctuations à mesurer. A priori, il n'en existe pas dans la gamme de fréquences qui nous intéresse (5 Hz - 5 kHz) (nous le vérifierons plus loin). La mesure des fluctuations de fréquence est donc effectuée par une deuxième cavité, identique à la première ; celle-ci joue le rôle de discriminateur de fréquence. Le faisceau en réflexion de la deuxième cavité permet les mesures en utilisant la même technique Pound Drever.

Le signal résultant est donc l'écart entre les fluctuations de fréquence du faisceau stabilisé par la première cavité de référence avec les fluctuations de longueur de la cavité de mesure, converties en fluctuations de fréquence par

$$\tilde{\nu} = \tilde{x} \frac{\nu_{\text{opt}}}{L_c} \quad (2.1)$$

où ν_{opt} est la fréquence du faisceau laser et L_c la longueur de la cavité. On peut supposer que les deux cavités ont un bruit identique, puisqu'elles sont dans des environnements identiques. Le signal est alors la somme quadratique des deux bruits de fréquence, soit $\sqrt{2}$ fois le bruit absolu de fréquence du laser asservi sur une cavité.

Ce bruit absolu de fréquence doit être comparé au niveau requis pour l'étage de préstabilisation que nous avons calculé dans le chapitre précédent.

2.3 Implantation

2.3.1 Les cavités Fabry Perot

Stabilité de longueur des cavités

La stabilité de longueur de la cavité de référence est un point crucial. Il faut donc maîtriser les bruits qui peuvent en altérer la longueur : bruit sismique, bruit thermique, dilatations.

La cavité de référence est un support céramique de 30 cm de long, évidé sur son axe pour permettre le passage du faisceau. Des miroirs sont adhésés par contact optique à chaque extrémité ; ils forment la cavité optique proprement dite. Le support céramique est conçu de manière à avoir sa première fréquence de résonance mécanique la plus haute possible. La forme de bicône, la plus proche de la sphère, a été retenue. La première fréquence de résonance longitudinale se situe alors à 11840 Hz [72] d'après le logiciel par éléments finis SYSTUS (la fréquence mesurée est 11 690 Hz). Le logiciel SYSTUS donne une première fréquence de résonance non longitudinale à 9680 Hz, mais celle-ci ne devrait pas avoir d'effet sur la variation de chemin optique ; elle n'est d'ailleurs pas observée. Une fréquence de résonance élevée permet d'éviter que la résonance de la cavité ne soit excitée par le bruit sismique. Avec un modèle simple de bruit sismique, celui-ci a une valeur de $\tilde{x} = 10^{-6}/f^2$

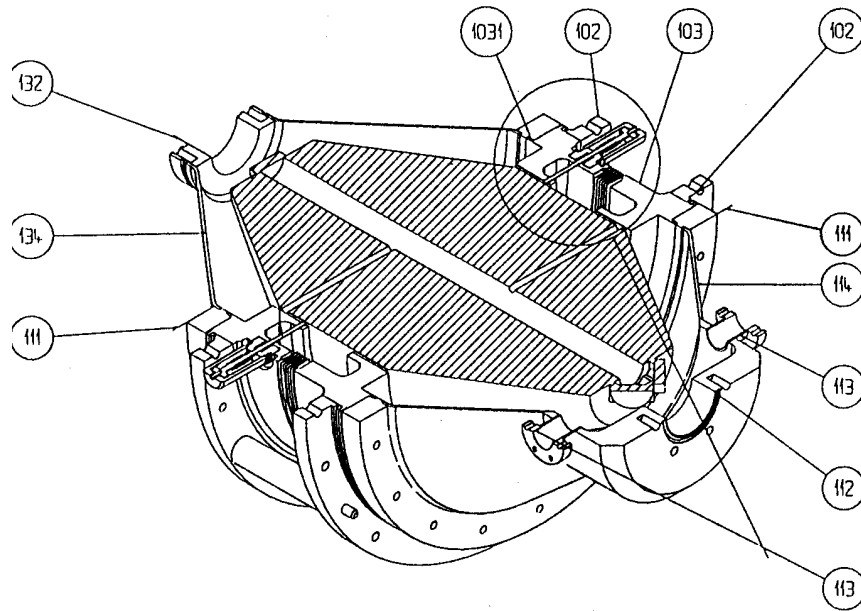
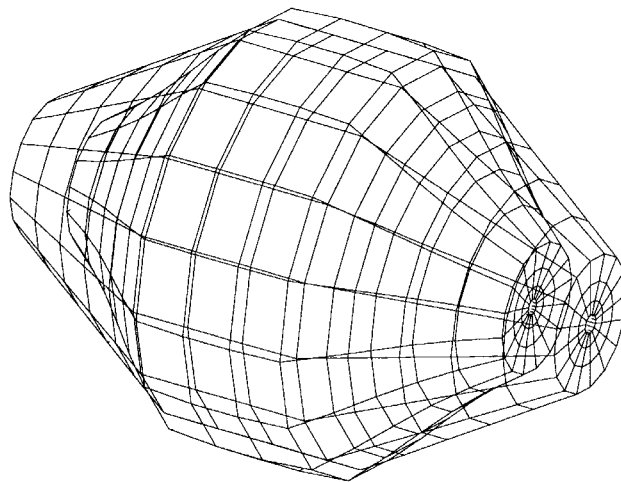


FIG. 2.1 – Définition mécanique des cavités



FREQUENCE = 11847.

FIG. 2.2 – Calcul d'une résonance des cavités par SYSTUS

m/ $\sqrt{\text{Hz}}$. Son amplitude à 11840 Hz est de $\sim 7.10^{-15}$ m/ $\sqrt{\text{Hz}}$; même avec une isolation sismique minimale, la résonance de la cavité sera excitée de façon négligeable.

Les vibrations de la cavité sont excitées aussi par le bruit thermique. La géométrie complexe ne permet pas un calcul exact de la déformation et de l'amplitude comme nous l'avons fait pour les miroirs cylindriques. Nous pouvons toutefois obtenir un ordre de grandeur à l'aide d'un modèle simplifié :

$$\tilde{x}^2 = 4k_B T \frac{\phi}{M (2\pi f_n)^2 (2\pi f)} \quad (2.2)$$

où \tilde{x} est la variation de longueur analysée à la fréquence f , f_n la fréquence de résonance, $M = 13$ kg la masse physique, l'angle de pertes ϕ étant supposé constant en fonction de la fréquence. Cette formule est valide pour $f \ll f_n$. Le coefficient de surtension mécanique mesuré de la cavité est $Q = 60\,000$. Le seuil de bruit de fréquence calculé à partir du bruit thermique et de l'équation 2.1 vaut alors

$$\tilde{\nu} = 2,3.10^{-5} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f} \right) \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.3)$$

Pour une détermination précise, tous les modes de vibrations devraient en fait être pris en compte, et la masse effective de chacun peut être notablement inférieure à la masse réelle.

Pour éviter des dérives de dilatation de la longueur des cavités, celles-ci sont construites en une céramique dont le coefficient d'expansion thermique α est très faible, l'ULE [73]. α est donné par le fournisseur d'ULE

$$\alpha = 1,6.10^{-9} T - 3,2.10^{-8} \quad (2.4)$$

où T est la température en °C. α vaut donc de l'ordre de 10^{-9} autour de 20 °C.

Définition optique

La cavité optique est triangulaire (cf. schéma 2.3), ce qui permet d'éviter les retours de lumière vers la source laser. Les deux miroirs montés sur un dièdre à l'une des extrémités ont la même réflectivité. Le miroir courbe, à l'autre extrémité, a un dépôt diélectrique pour le rendre réfléchissant au maximum. On peut montrer qu'une telle cavité est équivalente, pour ses propriétés optiques, à une cavité à deux miroirs ; le miroir courbe de renvoi n'intervient pas alors dans les calculs de finesse et de contraste.

Comme nous l'avons montré, le rapport signal à bruit dans la mesure de fluctuations de fréquence, où le bruit est le bruit de photons, vaut

$$\rho = \sqrt{\frac{\eta P_{\text{in}}}{h\nu_{\text{opt}}}} \frac{2J_0(m)J_1(m)(1-\zeta)}{\sqrt{1-(1-\zeta^2)J_0^2(m)}} \frac{\tilde{\nu}}{f_P} \quad (2.5)$$

On a donc intérêt à avoir une finesse élevée pour diminuer f_P .

Pour mesurer 10^{-4} Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$ et en supposant une cavité couplée optimalement ($\zeta = 0$), avec une puissance incidente de 10 mW, il faut un pôle à 12 kHz. L'intervalle spectral libre de la cavité valant 475 MHz, la finesse minimale doit être de 20000.

En fait, la finesse mesurée est de 30000, et le pôle se situe alors à 8 kHz. La puissance incidente mesurée est d'environ 6 mW sur la première cavité et 2 mW sur la seconde. Le contraste des cavités est d'environ 60 %. Le seuil minimal de fluctuations de fréquence détectables est donc, avec un indice de modulation $m \approx 0,9$, $2 \cdot 10^{-4}$ Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$ pour la première cavité et $3,5 \cdot 10^{-4}$ Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$ pour la seconde (en utilisant l'équation 1.13 du chapitre précédent).

Bruit de phase

La phase du faisceau lumineux doit rester très stable. Il faut donc éviter toutes les sources pouvant provoquer des variations de chemin optique.

Le faisceau stabilisé en fréquence se propageant dans l'air, les fluctuations d'indice sont réduites en enfermant l'ensemble de l'expérience dans une enceinte. Il faut éviter aussi d'enfermer les électro-optiques de correction de phase et de modulation dans des boîtiers dont les seules ouvertures laissent passer le faisceau : l'air chauffé par les transistors à proximité des cristaux vient perturber la phase de ces derniers.

Dans la version initiale de l'expérience, le faisceau stabilisé était envoyé sur le banc optique par une fibre optique. Cette fibre produisait des fluctuations de fréquence par effet Kerr [66]. Les fluctuations d'amplitude du faisceau, non corrigées, se transforment en fluctuation d'indice du milieu cristallin où se fait la propagation

$$n = n_0 + \gamma I \quad (2.6)$$

où γ est l'indice non-linéaire, et I l'intensité du faisceau. Par exemple, dans une fibre optique de longueur $l = 30$ m, de section 10^{-12} m², avec $\gamma = 4 \cdot 10^{-20}$, une fluctuation $\tilde{P} = 10^{-4}$ W/ $\sqrt{\text{Hz}}$ produit une fluctuation d'indice $\tilde{n} = 4 \cdot 10^{-12}$ / $\sqrt{\text{Hz}}$ et donc des fluctuations de phase

$$\tilde{\phi} = 2\pi \frac{l}{\lambda} \tilde{n} = 7,5 \cdot 10^{-4} \quad \text{rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.7)$$

et des fluctuations de fréquence

$$\tilde{\nu} = 2\pi f \tilde{\phi} = 0,5 \quad \text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad \text{à } 100 \text{ Hz} \quad (2.8)$$

Ces valeurs disqualifient la fibre optique.

2.3.2 Implantation optique

Le montage permet l'asservissement d'un « MISER » Nd:YAG commercial (Lightwave 123) de 300 mW [74] sur une des cavités, qui est utilisée comme référence de longueur. L'autre cavité sert à la mesure des fluctuations absolues de fréquence.

Le bruit en fréquence de ce laser mesuré sur une cavité de faible finesse donne

$$\tilde{\nu} = 100 \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f} \right) \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.9)$$

Le montage du banc optique se schématise comme suit (figure 2.3) :

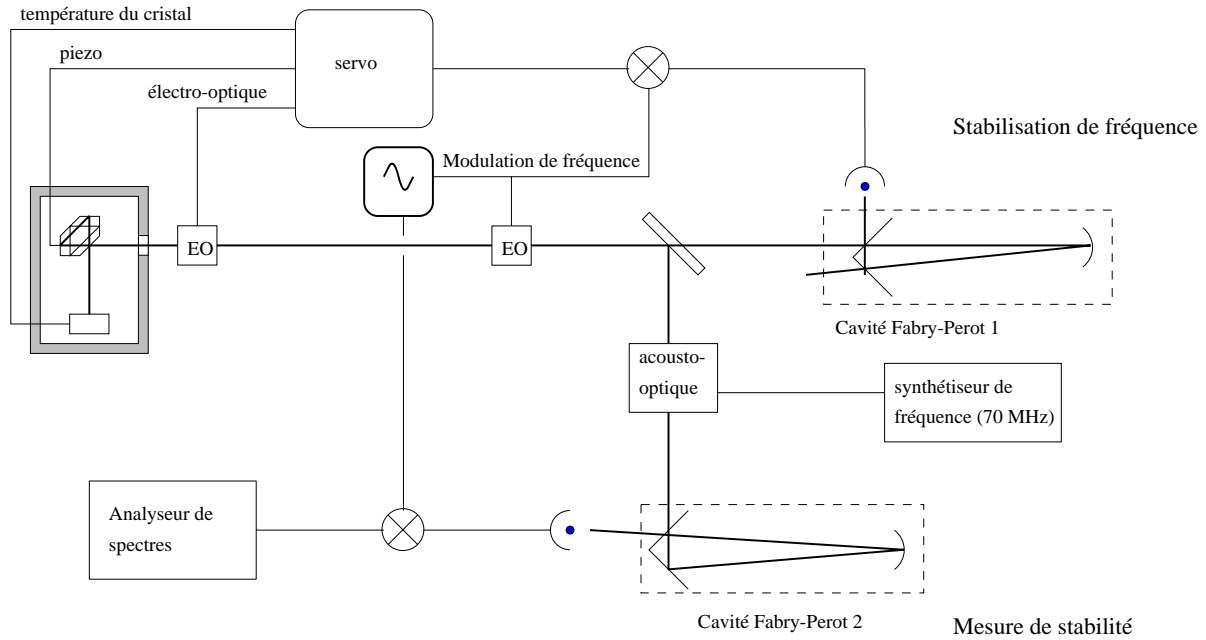


FIG. 2.3 – Schéma du montage optique pour la mesure absolue de fluctuations de fréquence

Le faisceau laser est modulé en fréquence au moyen d'un cristal électro-optique LiTaO_3 modulateur de phase, à la fréquence de modulation 14 MHz. Une partie de ce faisceau est envoyée sur la première cavité, une partie sur la seconde par une lame séparatrice.

Le faisceau réfléchi par la première cavité est envoyé sur une photodiode, puis démodulé de façon synchrone. Le signal électrique est alors amplifié puis filtré pour obtenir la fonction de transfert voulue (cf. chapitre précédent). La correction est appliquée suivant trois voies, suivant la dynamique et la plage de fréquence de chacune. La voie piezo-électrique, en agissant sur la longueur de la cavité laser, permet les corrections de fréquence jusqu'à 8 kHz. La correction aux fréquences supérieures, jusqu'à 1 MHz, se fait avec un électro-optique identique à celui qui fait la modulation de fréquence. La correction de la température du

cristal permet des corrections sur le long terme, et évite les tensions continues sur le cristal piezo-électrique, ce qui améliore sa linéarité et évite des sorties de la dynamique lorsque la température change. Le fonctionnement de l'expérience sur le long terme est alors possible.

La deuxième cavité est du même type que la première. Sa longueur optique est toutefois légèrement différente ; leurs résonances sont séparées de quelques centaines de MHz. L'ajustement des fréquences de résonance se fait par chauffage de l'enceinte de la deuxième cavité et contrôle de cette température par thermistance. L'inconvénient est qu'elle n'opère plus alors à température optimale pour sa dilatation. Le réglage fin des fréquences de résonance est ajusté par un cristal acousto-optique, dirigé par un synthétiseur de fréquence bas-bruit. On ajuste donc la température de manière à ce que les fréquences de résonance soient séparées d'environ 140 MHz ; le cristal acousto-optique, dont la fréquence d'utilisation est 70 ± 5 MHz, est utilisé en double passage ; les quelques kilohertz restants sont ajustés avec le synthétiseur de fréquence.

Le signal réfléchi par la cavité 2 est recueilli sur une photodiode, démodulé de façon synchrone. Le signal résultant, une fois calibré, permet la mesure du bruit absolu de fréquence.

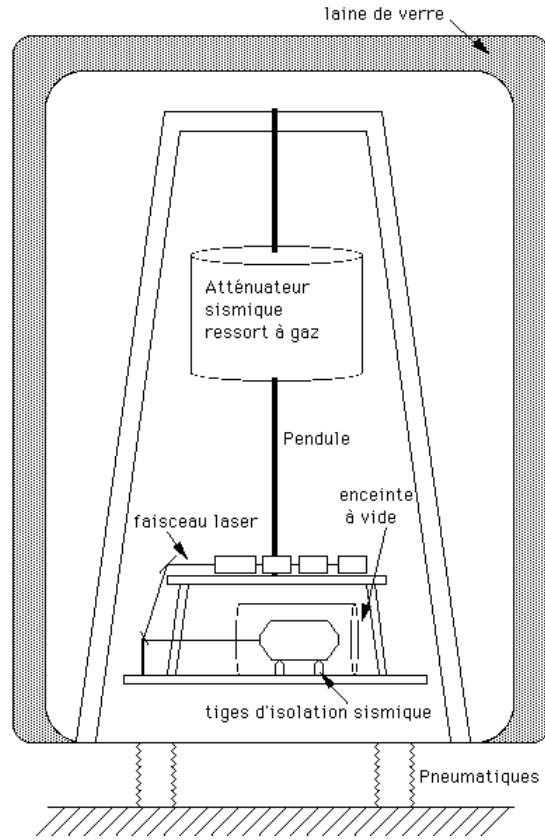
Sur le schéma ne sont pas représentés de nombreux composants optiques utilisés dans l'expérience : lames $\lambda/2$ et $\lambda/4$ servant à faire tourner la polarisation et passer d'une polarisation elliptique à une polarisation longitudinale ; polariseurs ; isolateur de Faraday pour éviter les retours de lumière vers la source laser ; lentilles d'adaptation du faisceau laser (taille du col, position de ce dernier) aux paramètres des cavités.

2.3.3 Implantation mécanique

Le montage mécanique vise à isoler l'expérience des bruits pouvant affecter la longueur des cavités.

Isolation acoustique

Les cavités sont placées chacune dans une enceinte à vide ($P \approx 5.10^{-8}$ mbar). Le bruit acoustique ne vient donc pas exciter directement les résonances. Ce vide permet également de ne pas dégrader le coefficient de qualité du matériau, et donc évite d'augmenter inutilement le bruit thermique. Il garantit la propreté, et en empêchant la pollution des miroirs, conserve la finesse de la cavité optique. La laine de verre entourant l'enceinte qui contient l'ensemble du dispositif expérimental atténue aussi légèrement le bruit acoustique. Les ondes acoustiques ne peuvent alors plus se propager qu'au travers des pieds supportant les cavités.

FIG. 2.4 – *Isolation sismique, acoustique et thermique de l'expérience*

Isolation sismique

Le plateau sur lequel est posé le montage optique est suspendu à un super-atténuateur à gaz, prévu initialement pour l'isolation sismique des masses-test de Virgo.

Cela permet une isolation du bruit sismique dans le sens horizontal, grâce au pendule, qui agit comme un filtre passe-bas de second ordre avec une fréquence de coupure d'environ 0,5 Hz. L'isolateur à gaz permet également une isolation dans le sens vertical.

Chacune des cavités est posée sur 4 pieds, tiges métalliques pointues qui se comportent comme des isolateurs sismiques au-dessus de leur fréquence de résonance. Dans la version initiale de l'expérience, ces supports avaient une fréquence de résonance basse (8 Hz). Le bruit sismique venait exciter cette résonance, à basse fréquence et de grande amplitude. Cela n'était pas gênant pour le mouvement d'élongation des cavités mais surtout pour l'effet Doppler relatif entre les deux cavités. L'amplitude du mouvement excité par le bruit sismique provoque un bruit de fréquence

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu_{\text{opt}}}{c} 2\pi f \tilde{x} \quad (2.10)$$

Pour un mouvement d'amplitude $1\ \mu\text{m}$ à la fréquence de 8 Hz cela fait environ $60\ \text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$; c'est au-dessus des spécifications pour l'étage de préstabilisation en fréquence. C'est fort probablement la cause d'un bruit qui nous gênait dans la version initiale de l'expérience : sans isolation sismique, le mouvement de la cavité est visible à l'œil nu. J'ai donc conçu des supports de cavités avec des fréquences de résonance plus élevées (autour de 30 Hz). Une tige en flexion a une constante de raideur

$$k = \frac{3\pi}{64} E \frac{d^4}{L^3} \quad (2.11)$$

où E est le module d'Young, d le diamètre de la tige, L sa longueur. On estime la masse sur chacune des tiges à $M/4$. Pour avoir une fréquence de résonance autour 30 Hz avec des tiges en acier ($E = 2.10^{11}\ \text{N/m}^2$), on choisit une longueur de 11 mm et un diamètre de 2 mm. Les cavités montées sur ces tiges montrent une première résonance mécanique mesurée de 52 Hz identique au calcul.

Si une cavité triangulaire a un léger mouvement de rotation autour d'un axe vertical passant par son centre, par rapport à un référentiel galiléen, l'effet Sagnac, similaire à l'effet Doppler va provoquer un bruit de fréquence

$$\tilde{\nu} = \nu_{\text{opt}} \frac{4A}{\lambda p} \tilde{\Omega} \quad (2.12)$$

où A est la surface délimitée par le faisceau lumineux, p le périmètre du parcours, $\tilde{\Omega}$ la fréquence de Fourier de la pulsation de rotation. Un déplacement de l'extrémité de la cavité de $1\ \mu\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ dans le sens tangentiel donne un bruit $\tilde{\nu} = 8\ \text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$. Cet effet Sagnac, quoique plus faible que l'effet Doppler, donne un bruit de même ordre de grandeur.

Isolation thermique

Pour atténuer les fluctuations de température trop rapides, l'enceinte qui contient le banc optique est entourée de laine de verre. L'isolation, incomplète, n'empêche pas les variations diurnes ou sur des intervalles de temps plus longs.

2.4 Résultats et interprétation

2.4.1 Calibration

La calibration (tension détectée/écart de fréquence mesuré) est possible de plusieurs façons. Pour chaque calibration, une des cavités est asservie et l'autre voie permet la calibration. La finesse de chacune des cavités est mesurée par balayage de la fréquence avec le cristal piezo-électrique : la conversion tension/fréquence du cristal étant connue, le relevé

des sommets du signal d'erreur Pound Drever permet la mesure directe des pôles des cavités. Une autre façon de mesurer ce signal Pound Drever est d'envoyer une rampe sur le synthétiseur de fréquences. La mesure des pôles est alors directe. La connaissance des fréquences des pôles donne immédiatement la caractéristique tension/fréquence par balayage du signal Pound Drever de la cavité de mesure.

Une troisième méthode est l'envoi d'un signal sinusoïdal d'amplitude connue sur le synthétiseur de fréquences. La mesure du pic donne la caractéristique tension/fréquence.

Les finesses mesurées sont $\mathcal{F} = 29000$ ($f_P = 8200$ Hz) pour la première cavité et $\mathcal{F} = 33000$ ($f_P = 7200$ Hz) pour la seconde.

2.4.2 Bruit de fréquence

Après aménagements du banc jusqu'à l'obtention de résultats satisfaisants, nous avons mesuré les bruits indiqués sur la figure 2.5. Le laser est asservi en fréquence sur la première cavité et la deuxième cavité sert de discriminateur. La courbe du haut indique le bruit de fréquence du laser libre, mesuré dans une expérience indépendante. La courbe du milieu représente la somme des bruits de fréquence des deux cavités ; le pôle de la cavité (8 kHz) a été corrigé. La courbe du bas est le signal d'erreur sur la cavité 1.

Le bruit de fréquence doit être comparé avec les spécifications pour l'étage de préstabilisation en fréquence de Virgo (voir figure 2.6). On voit que la stabilité de fréquence remplit les conditions requises pour le premier étage de stabilisation en fréquence, avec une large marge de sécurité (de 1 à 3 ordres de grandeur).

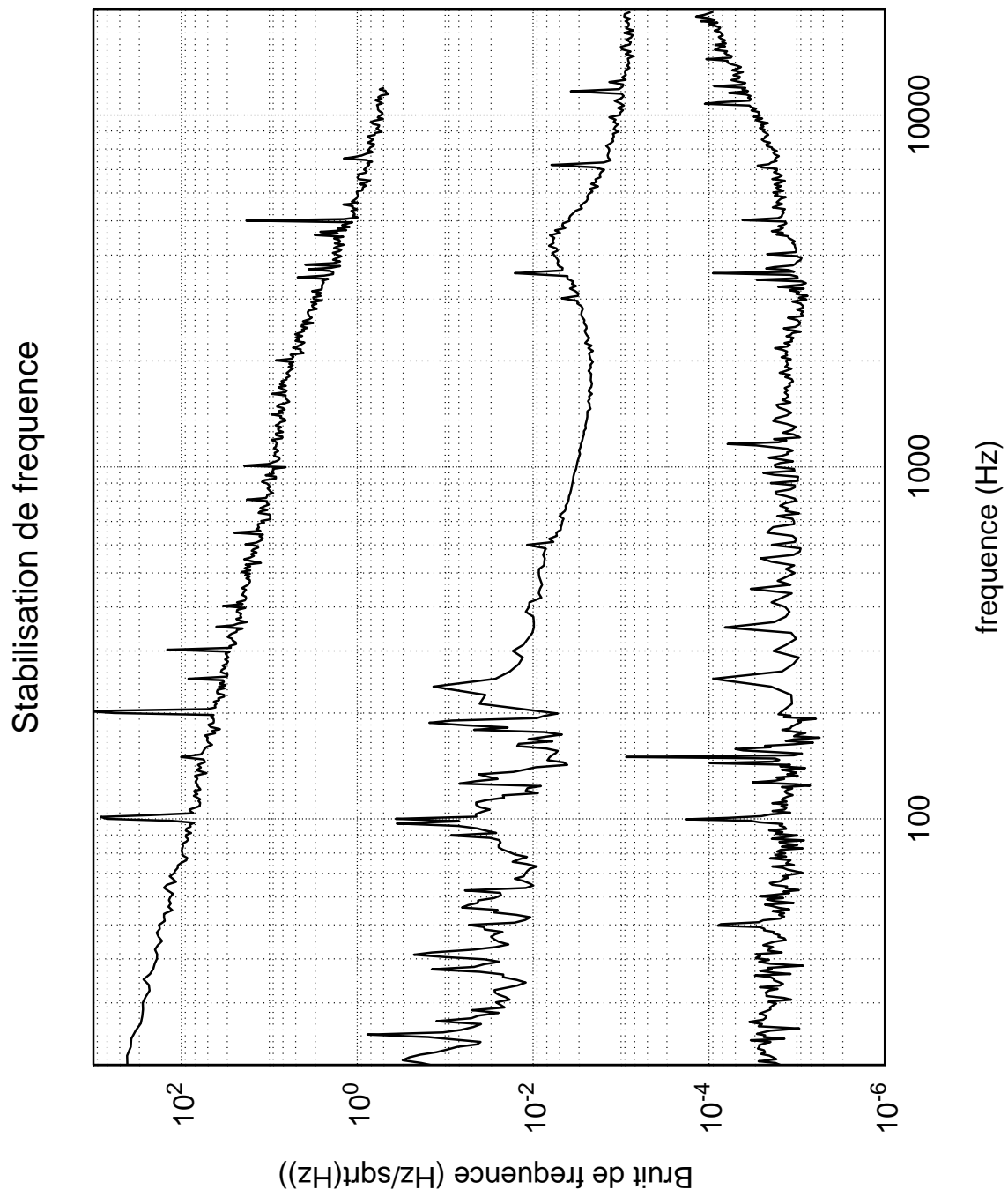
2.4.3 Analyse

Signal d'erreur

Le signal d'erreur mesuré vaut, comme on peut le montrer avec les formules du chapitre précédent,

$$\tilde{i}_1 = K_1 \frac{1}{1+G} (\tilde{\nu}_{cr} + \frac{1}{G} \tilde{\nu}_{fr}) + \frac{1}{1+G} (\tilde{i}_{en} + \tilde{i}_{sn}) \quad (2.13)$$

où G est le gain en boucle ouverte, \tilde{i}_{sn} est le courant de bruit de photons, \tilde{i}_{en} est le courant de bruit d'électronique, $\tilde{\nu}_{cr}$ le bruit de fréquence d'une cavité donné par sa stabilité de longueur, K_1 est la conversion fréquence/courant de la photodiode et de la technique Pound Drever. Avec les paramètres de la cavité mesurés (contraste $C \approx 0,5$, indice de modulation $m \approx 0,9$, pôle à 8 kHz, puissance incidente $P_{in} \approx 9$ mW) $K_1 = 2.10^{-7}$ A/Hz. Le bruit de photons peut être évalué à $\tilde{i}_n = \sqrt{2eI_{DC}} = 4,4.10^{-11}$ A/ $\sqrt{\text{Hz}}$, soit $\tilde{\nu} = 2.10^{-4}$ Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$. La courbe du bas est donc plus petite que le bruit de photons. Elle est limitée par le bruit électronique de la mesure du signal d'erreur. La remontée vers ≈ 4 kHz montre qu'alors le

FIG. 2.5 – *Bruit de fréquence de l'expérience de préstabilisation*

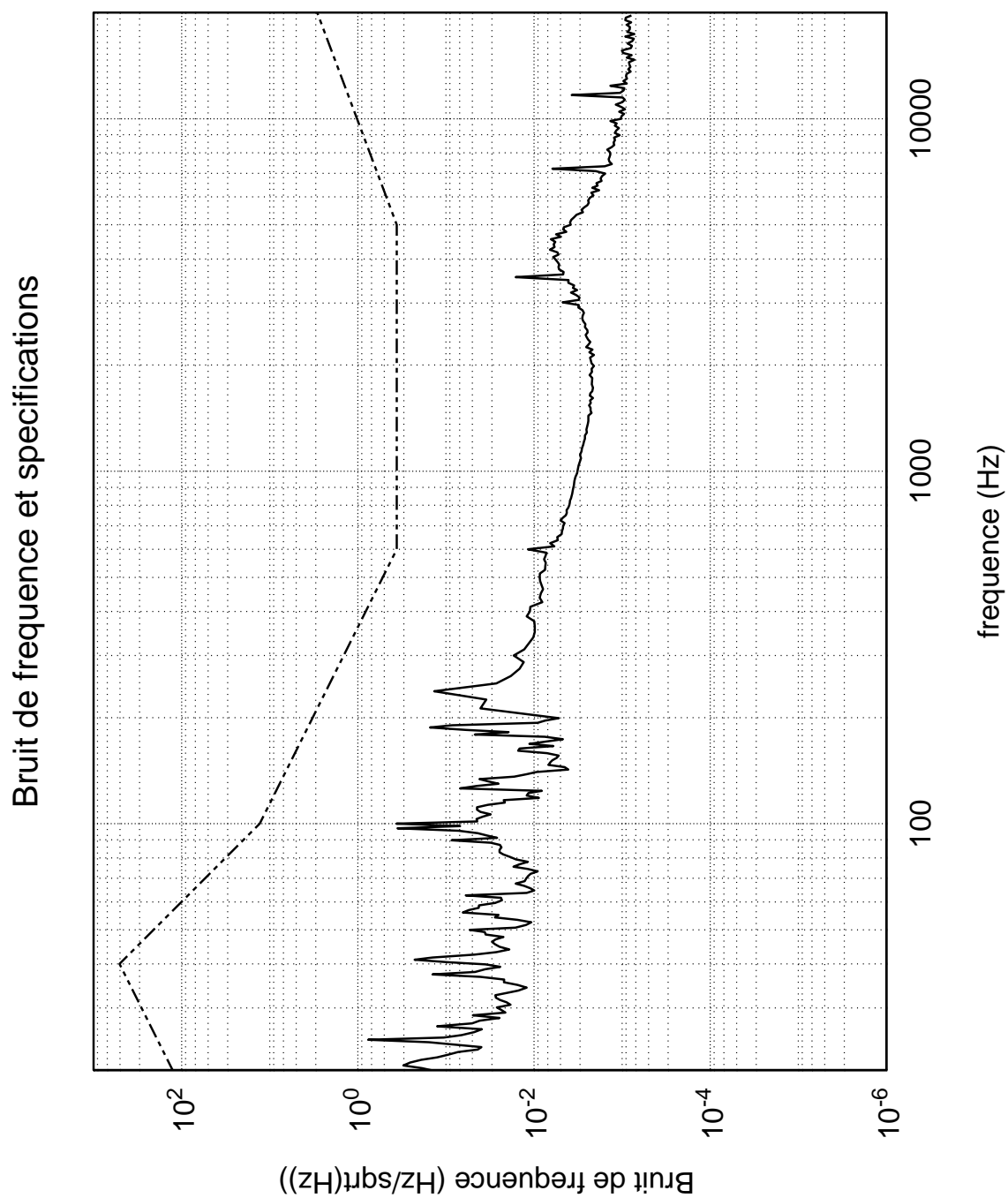


FIG. 2.6 – Comparaison du bruit de fréquence avec les spécifications de Virgo

gain n'est plus assez élevé (le bruit de photons varie avec la fréquence par $\sqrt{1 + (f/f_P)^2}$ et le gain baisse).

Signal de bruit de fréquence

Le signal de bruit de fréquence est la somme du bruit de longueur des deux cavités. En basse fréquence, ce n'est plus le bruit de longueur des cavités qui est mesuré mais l'effet Doppler entre chacune des cavités, comme le montre le pic à 25 Hz, et les autres pics jusqu'à environ 500 Hz.

Au-dessus de 500 Hz, le bruit sismique filtré par le pendule dépend de la fréquence comme $1/f^4$. La pente du bruit mesuré suit une pente de loi $1/f$: elle a donc une autre cause.

Il est possible que cette pente soit due à des dérives lentes de fréquence. En effet, supposons que la cavité 2, qui est chauffée, subisse des dilatations de longueur en fonction du temps $x(t) = at$ sur l'échelle du temps de mesure. L'analyseur de spectre donne une transformée de Fourier sur un temps limité T

$$\text{TF}[x(t)] = \int_0^T x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.14)$$

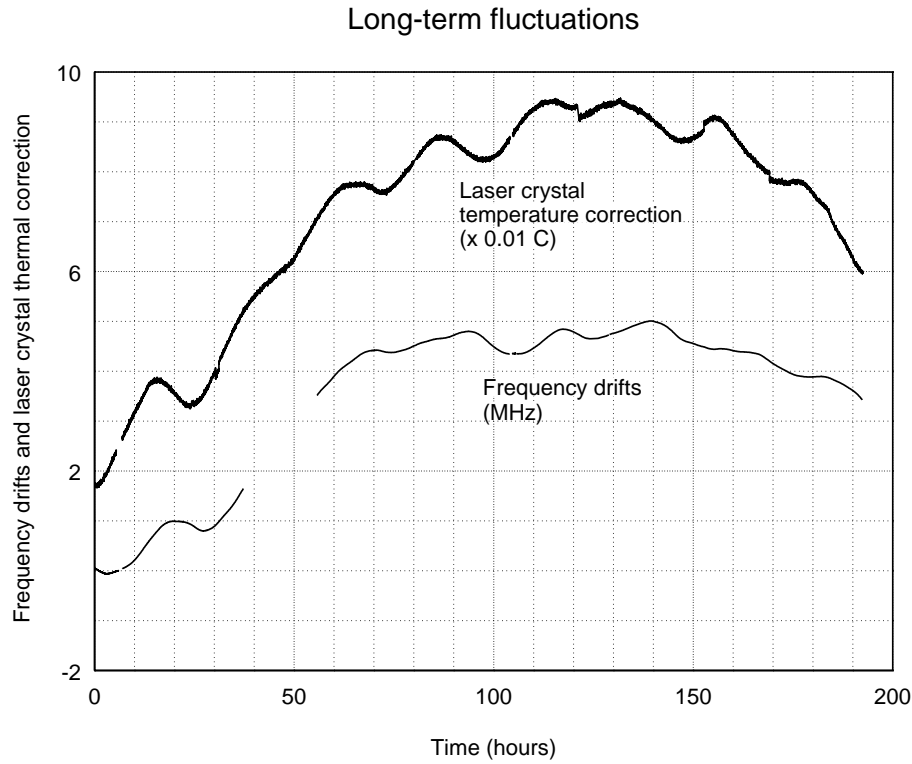
et, en gardant le terme dominant, la densité spectrale est

$$\tilde{x} = \frac{aT}{2\pi f} \sqrt{\frac{2}{T}} \quad (2.15)$$

soit, avec $T = 80$ ms (mesure de l'intervalle 200–20 kHz), $a = 30$ Hz/s correspond au bruit mesuré $\tilde{\nu} \approx 2/f$ Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$. Une telle dérive est parfaitement possible et correspond à ce que l'on peut mesurer par ailleurs (voir suite). J'ai pu vérifier expérimentalement qu'un signal en forme de rampe donne un bruit en $1/f$, d'amplitude donnée par 2.15, sur l'analyseur de spectre.

2.4.4 Dérives à long terme

Pour mesurer les dérives à long terme, l'écart continu de fréquence sur la voie de mesure de bruit de fréquence (cavité 2) est utilisé pour asservir le synthétiseur de fréquence. Le signal de commande du synthétiseur mesure alors les dérives à long terme de la fréquence. Un micro-ordinateur équipé d'une carte de conversion analogique/numérique vient mesurer cette grandeur toutes les 60 s. La voie thermique de correction de la fréquence du laser ajuste la température du cristal ; ce signal est donc proportionnel aux variations de température dans l'enceinte. Pour cette expérience, la suspension sismique n'est pas utilisée : il n'y a pas besoin de bonne stabilité à court terme, et le ressort à gaz n'est pas utilisable en opération continue sur plusieurs jours (fuites, dilatations importantes du gaz en fonction de la température, et donc hauteur du banc optique peu contrôlable).

FIG. 2.7 – *Dérives à long terme de la fréquence*

Comme on peut le voir en figure 2.7, les dérives de fréquences et les variations de température sont corrélées. On peut évaluer la dérive moyenne à 1 MHz pour 10 heures, soit 30 Hz/s, ce qui est bien la valeur trouvée dans la mesure de bruit.

Ces dérives sont principalement dues à la dilatation thermique de la deuxième cavité, qui a été légèrement chauffée pour être à résonance avec la première. Elle n'est donc plus à son point optimal de dilatation. Le bruit de fréquence mesuré est donc pessimiste, puisque limité par ses dérives, qui n'existeront pas dans l'expérience Virgo où la température de l'environnement de la cavité de préstabilisation est maintenu autour de 20 °C.

2.4.5 Stabilité : variance d'Allan

La grandeur utilisée en métrologie de mesures de temps et de fréquences pour spécifier la stabilité d'un oscillateur est la variance d'Allan [75, 76]. Celle-ci exprime la variance de la

fréquence moyennée sur une période T . Plus précisément, en posant

$$y(t) = \frac{\nu(t)}{\nu_{\text{opt}}} \quad (2.16)$$

$$\bar{y}(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} y(t') dt' \quad (2.17)$$

$$\bar{y}_i = \bar{y}(t + iT, \tau) \quad (2.18)$$

la variance d'Allan σ_y est définie par

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2 \quad (2.19)$$

où N est le nombre de segments \bar{y}_i utilisés.

La variance d'Allan la plus couramment utilisée est calculée avec $N = 2$ et $T = \tau$. Elle se définit alors par

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1})^2 \rangle \quad (2.20)$$

Cette même variance peut se calculer à partir du spectre de bruit de fréquence avec la formule (cf. [77])

$$\sigma_y^2 = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} 2S_y(f) \sin^2(\pi f T) \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 df \quad (2.21)$$

où $S_y(f)$ est la densité spectrale de puissance de bruit de fréquence, f_{\min} et f_{\max} sont les limites du spectres dues à l'appareil de mesure.

A partir du spectre de bruit de fréquence mesuré, une variance d'Allan à court terme peut être calculée par l'équation 2.21. Pour la mesure sur des intervalles de temps plus longs, les mesures de dérives du paragraphe précédent donnent la stabilité avec l'équation 2.20.

Sur la figure 2.8, la courbe (1) est la stabilité de fréquence déduite de la mesure spectrale de bruit de fréquence. Les courbes (2) et (3) sont déduites de mesures à moyen et long terme (de $T = 1$ seconde à $T = 30$ heures). La pente pour des intervalles de temps longs est due aux dilatations thermiques de la cavité 2 : si $\nu(t) = at$, alors $\sigma_y(T) = (1/\sqrt{2}) aT/\nu_{\text{opt}}$. Pour $T = 10$ secondes, a vaut donc 8 Hz/s.

La variance d'Allan obtenue peut être comparée à celle des meilleurs oscillateurs existant actuellement (voir figure 2.8). La courbe (4) représente la stabilité de l'oscillateur hyperfréquences à saphir de l'U.W.A. [78], la courbe (5) la stabilité de fréquence du maser à hydrogène de l'observatoire de Shangaï [79], la courbe (6) la stabilité de fréquence du laser Nd:YAG du Tokyo Institute of Technology (expérience similaire à la nôtre) [80].

La stabilité de fréquence obtenue est donc la plus stable, à court terme, du monde. La stabilité à long terme, à cause des dilatations de la cavité 2 qui est légèrement chauffée,

n'est pas très bonne. Elle pourrait être largement améliorée en ayant chacune des cavités à son point optimal (autour de 20 °C), et par un asservissement de la température du banc optique.

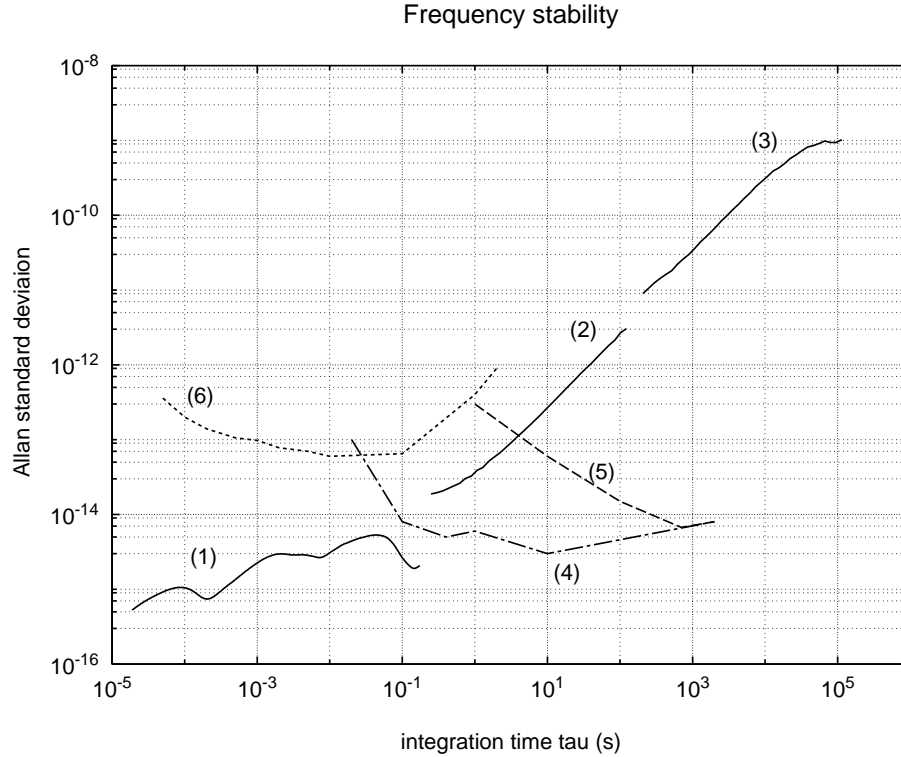


FIG. 2.8 – *Variance d'Allan du laser stabilisé sur une cavité de référence, courbes (1) (2) et (3). Courbes (4), (5) et (6) : voir texte*

2.4.6 Automatisation de l'accrochage

Le laser qui illumine l'interféromètre Virgo doit être fiable. Un système permettant l'accrochage automatique des boucles d'asservissement a donc été développé. Les mesures de dérives de fréquence à long terme ont permis de tester les performances du système de logique électronique qui réalise cette fonction.

Le système d'accrochage automatique utilise la photodiode en transmission de la première cavité. La tension moyenne est comparée à un seuil ; lorsqu'elle y est inférieure, le laser est considéré comme décroché. La fréquence du laser est alors balayée par l'envoi d'une tension en rampe sur le cristal piezo-électrique du laser. Lorsque la fréquence est proche de la fréquence de résonance, la lumière transmise par la cavité s'accroît ; le comparateur reconnaît le franchissement du seuil, stoppe le balayage et le gain de la boucle d'asservissement passe de 0 à sa valeur réglée à l'avance. La durée moyenne d'un raccrochage du laser est de quelques dizaines de secondes.

L'expérience a consisté en la mesure de l'état accroché / décroché du laser pendant les quelques 200 heures de mesures de dérives à long terme. Le micro-ordinateur qui mesure les dérives enregistre également le nombre de décrochages pendant un intervalle de 60 s.

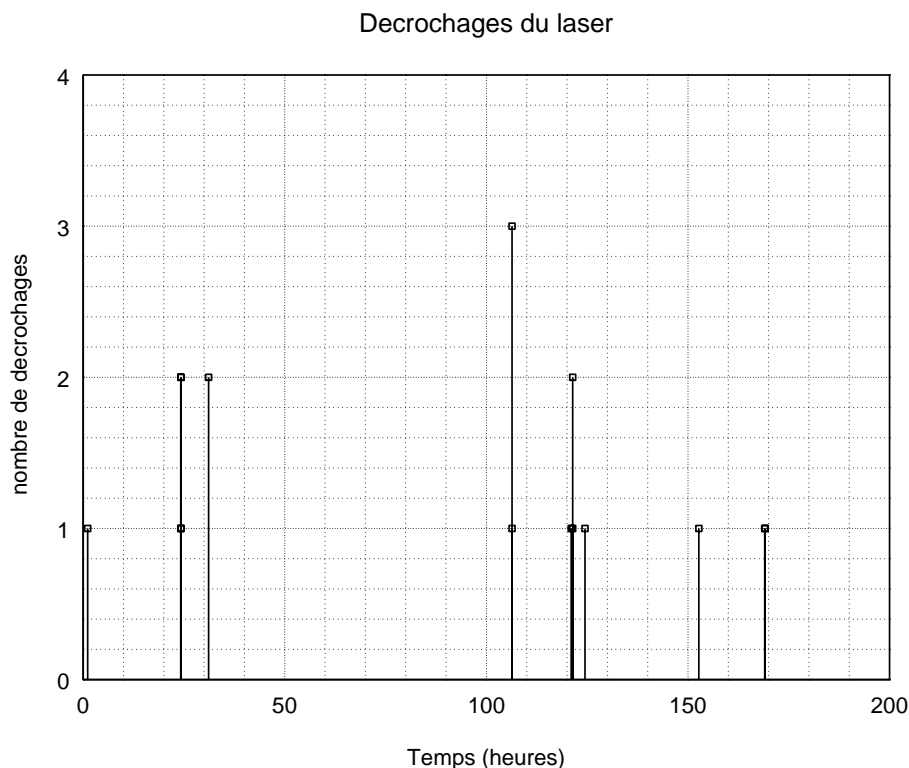


FIG. 2.9 – *Décrochages du laser lors de la mesure des dérives à long terme*

Le résultat (figure 2.9) et l'analyse précise des données montre que à chaque fois que le laser a décroché, il a aussitôt raccroché dans des intervalles de temps de quelques dizaines de secondes. Il n'est jamais resté dans un état où il n'est pas en résonance avec la cavité pendant une durée de plus d'une minute.

De plus, la plupart des décrochages du laser observés ont une cause connue. Les chocs mécaniques ne sont pas filtrés par l'isolateur sismique (atténuateur à gaz), puisque ce dernier n'est pas utilisé. Ils provoquent donc des décrochages. Les chocs contre l'enceinte abritant le banc optique pendant les 200 heures d'opération ont été répertoriés. D'autres décrochages ont eu lieu à cause de parasites électriques, et d'une mauvaise isolation électrique de la logique de commande. Le simple fait de brancher ou débrancher un fer à souder a provoqué plusieurs des décrochages de la figure 2.9.

L'isolation de l'alimentation de la partie électronique a été réétudiée pour éviter les parasites électromagnétiques. Lorsque les cavités sont isolées sismiquement, les chocs mécaniques ne provoquent plus de décrochages du laser. Le système semble donc fiable, et peut être utilisé dans l'expérience Virgo.

2.5 Conclusion

L'expérience de stabilisation en fréquence nous a permis de vérifier que le laser stabilisé en fréquence possède les performances suffisantes et est assez fiable pour être utilisé dans l'expérience Virgo.

Le principe de fonctionnement du premier étage de stabilisation en fréquence est testé, et sa validité est montrée : la cavité de référence possède une stabilité de fréquence suffisante pour être utilisée.

Le laser stabilisé possède la stabilité de fréquence à court terme la plus grande du monde. Sa stabilité en fréquence sur le long terme peut être améliorée par des améliorations techniques simples, en particulier le contrôle de la température des cavités. Ceci n'a pas été fait parce que non nécessaire pour la construction de l'interféromètre Virgo ; mais les performances du laser obtenu permettent d'envisager la construction d'un interféromètre spatial comme LISA [81].

Conclusion

LES TRAVAUX présentés dans cette thèse ont permis de préciser la sensibilité que pourrait atteindre l'interféromètre Virgo. Diverses pistes ont été ouvertes pour l'améliorer.

Le bruit thermique des masses-test pourrait être amélioré par le choix d'un substrat dont les qualités sont meilleures que la silice fondue. Le saphir pourrait jouer ce rôle ; la faisabilité de substrats de grandes dimensions dans ce matériau, avec les propriétés optiques requises, reste toutefois à prouver. L'angle de pertes, s'il est limité par les pertes aux points de contact, pourrait être diminué par une conception plus détaillée de cette interface.

Le bruit des suspensions pourrait être amélioré par un matériau à faibles pertes, et en limitant les pertes aux points de contact ; cela n'est pas possible avec des fils d'acier, où les pertes thermoélastiques, incompressibles, dominent.

Une expérience de mesure directe de bruit thermique demande à être plus précisément spécifiée. Elle sera un banc de mesure et d'amélioration de la sensibilité de Virgo. Elle seule permet également de mesurer directement l'angle de pertes des ondes acoustiques à toutes les fréquences.

Les fluctuations de fréquence ne limitent pas la sensibilité, avec une symétrisation adéquate des cavités et avec l'asservissement de la fréquence sur la longueur de cavités optiques. Le premier étage de stabilisation de fréquence de Virgo a été construit. Nous avons démontré qu'il remplit les spécifications, et que le système est suffisamment fiable pour être utilisé en continu. Nous avons même obtenu une stabilité à court terme exceptionnelle. La stabilité à long terme pourrait être améliorée, au prix d'un meilleur contrôle en température.

Ces pistes permettraient l'amélioration de la sensibilité d'un détecteur interférométrique, terrestre comme Virgo ou spatial comme LISA. Les enjeux en sont la quantité d'événements détectables, l'amélioration de la précision des signaux, et plus généralement toute la nouvelle physique qui sera basée sur ce nouveau type de signaux : les ondes de gravitation.

Annexe A

Optique gaussienne

Pour une présentation générale de l'optique gaussienne, cf. [66], chapitre 3. Ce qui est donné ici est destiné à faciliter la lecture et les paramètres de faisceaux utilisés dans les calculs.

A.1 Approximation paraxiale

Les équations de Maxwell bien connues de propagation du champ électromagnétique dans le vide conduisent à l'équation d'onde :

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) E = 0 \quad (\text{A.1})$$

où E est une composante du champ électrique, que l'on note sous forme complexe, il suffit d'en prendre la partie réelle pour avoir l'onde physique. En faisant une analyse spectrale de E , on écrit $E = u(x, y, z) e^{i\omega t}$. u vérifie alors l'équation d'Helmholtz :

$$(\Delta + k^2) u(x, y, z) = 0 \quad (\text{A.2})$$

où $k = \omega/c$ et Δ est l'opérateur Laplacien. Une solution particulière de A.2 bien connue est l'onde plane :

$$u = u_0 e^{-ikz} \quad (\text{A.3})$$

avec $k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde, pour un faisceau se propageant le long de l'axe (oz). On cherche d'autres solutions de A.2 sous la forme d'ondes paraxiales, c'est-à-dire sous la forme de cette onde plane modulée spatialement :

$$u(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{-ikz} \quad (\text{A.4})$$

On se place dans le cas d'amplitudes complexes lentement variables (pour négliger $\partial_z^2 \psi$ devant $ik\partial_z \psi$) et ψ vérifie alors l'équation d'Helmholtz paraxiale :

$$(\nabla_T^2 - 2ik\partial_z) \psi = 0 \quad (\text{A.5})$$

où $\nabla_T^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

A.2 Modes TEM_{mn}

L'équation A.5 admet comme solutions les fonctions (en coordonnées cartésiennes) :

$$\psi_{mn}(x, y, z) = \frac{w_0}{w} H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) e^{i\Phi_{mn} - \left(\frac{1}{w^2} + i\frac{k}{2R}\right)(x^2 + y^2)} \quad (\text{A.6})$$

où H_{mn} sont les polynômes d'Hermite, $\Phi_{mn} = (m + n + 1)\zeta(z)$, w et R sont des fonctions de z :

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (\text{A.8})$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_0) \quad (\text{A.9})$$

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{A.10})$$

$w(z)$ est la « taille » du faisceau au point z , minimale au col w_0 en $z = 0$, $R(z)$ le rayon de courbure du front d'onde, infini au col ; z_0 est le paramètre de Rayleigh. Ces fonctions supposent le col situé à $z = 0$.

Lorsque la position du col du faisceau est fixée, un seul paramètre, w_0 , permet donc de décrire l'onde. L'ensemble des paramètres m, n permet alors de construire une base complète des fonctions ψ :

$$\psi(x, y, z) = \sum_{m,n} \alpha_{mn} \psi_{mn}(x, y, z) \quad (\text{A.11})$$

A.3 Faisceau gaussien

Dans cette thèse n'est considéré que le mode principal résonnant d'une cavité, le mode $m = 0, n = 0$.

Une onde se propageant suivant z s'écrit alors :

$$u(x, y, z) = u_0 \frac{w_0}{w} e^{-ikz - \left(\frac{1}{w^2} + i\frac{k}{2R}\right)(x^2 + y^2) + i\zeta(z)} \quad (\text{A.12})$$

L'intensité se distribue de façon gaussienne.

Annexe B

Asservissements : principes

B.1 Présentation

Le principe général d'un asservissement linéaire continu se représente par la figure B.1.

$w(t)$ est le signal de commande, $y(t)$ le signal de sortie, $e(t)$ le signal d'erreur (appelé aussi écart), $d(t)$ une perturbation et $c(t)$ le signal de correction. G_1 , G_2 et F sont des fonctions de transfert, généralement des fractions rationnelles de la variable complexe p , $p = i\omega$.

Dans le domaine fréquentiel, la fonction de transfert de l'ensemble est :

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)F(p)} \quad (\text{B.1})$$

où on représente par des majuscules les transformées de Fourier, et $G(p) = G_1(p)G_2(p)$. $H(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée; on pose aussi $T(p) = G(p)F(p)$ la

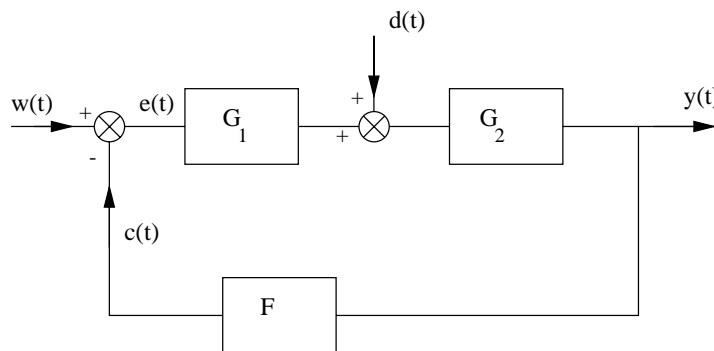


FIG. B.1 – Schéma d'un asservissement linéaire continu

fonction de transfert en boucle ouverte. $T(p)$ peut s'écrire

$$T(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes de la variable p .

B.2 Gain unité

La bande passante de l'asservissement est définie par la fréquence au gain unité, c'est-à-dire la pulsation ω_0 telle que $|H(i\omega_0)| = 1$. Pour $\omega > \omega_0$, $|H(i\omega)| < 1$ et pour $\omega < \omega_0$, $|H(i\omega)| > 1$. Pour $\omega \approx \omega_0$, on peut approximer H par la fonction H_0/p^k .

B.3 Stabilité

On se place dans le cas d'un système à déphasage minimum (Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de zéro à partie réelle positive). La stabilité est assurée si $k < 2$.

Bibliographie

- [1] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [2] E. Müller. Gravitational collapse, October 1995. Ecole d'été Les Houches, Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel.
- [3] L. Blanchet and T. Damour. Méthode d'itération post-minkowskienne et structure des champs gravitationnels radiatifs. *C.R. de l'Académie des sciences de Paris (II)*, 298(10):431–434, 1984.
- [4] S.T. Curran and D.R. Lorimer. Pulsar statistics - III. neutron star binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 276:347–352, 1995.
- [5] T. Piran. Les systèmes doubles d'étoiles à neutrons. *Pour la science*, 213:44–51, 1995.
- [6] S. Bonazzola and E. Gourgoulhon. Gravitational waves from pulsars: emission by the magnetic field induced distortion. *Astronomy and Astrophysics*, 1995. submitted.
- [7] K. Oohara. Coalescence of binary neutron stars, October 1995. Ecole d'été Les Houches, Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel.
- [8] S. Bonazzola. Gravitational waves emission from rotating neutron star, October 1995. Ecole d'été Les Houches, Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel.
- [9] B.F. Schutz. Determining the Hubble constant from gravitational wave observation. *Nature*, 323(6086):310–311, 1986.
- [10] E. Seidel. Black holes collision, October 1995. Ecole d'été Les Houches, Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel.
- [11] R. Wagoner. Detection and production of scalar gravitational waves, October 1995. Ecole d'été Les Houches, Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel.
- [12] R.A. Hulse and J.H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal*, 195(L51–L53), 1975.
- [13] T. Damour and N. Deruelle. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 44(263), 1986.

- [14] S.W. Hawking and W. Israel. *300 years of gravitation*. Cambridge, 1989.
- [15] J. Weber. Detection and generation of gravitational waves. *Physical Review*, 117:306–313, 1960.
- [16] D.G. Blair. *The detection of gravitational waves*. Cambridge university press, 1991.
- [17] A. Abramovici, W.E. Althouse, R.W.P. Drever, Y. Gursel, S. Kawamura, F.J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R.E. Spero, K.S. Thorne, R.E. Vogt, R. Weiss, S.E. Whitcomb, and M.E. Zucker. The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. *Science*, 256:325, 1992.
- [18] C. Bradaschia, R. Del Fabbro, A. Di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici, D. Pasuello, A. Brillet, O. Cregut, P. Hello, C.N. Man, M. Pham-Tu, A. Marraud, D. Shoemaker, J.Y. Vinet, F. Barone, L. Di Fiore, L. Milano, G. Russo, J.M. Aguirregabiria, H. Bel, J.P. Duruisseau, G. Le Denmat, Ph. Tournenc, M. Capozzi, M. Longo, M. Lops, I. Pinto, G. Rotoli, T. Damour, S. Bonazzola, J.A. Marck, E. Gourgoulhon, L.E. Holloway, F. Fuligni, V. Iafolla, and G. Natale. The VIRGO project: a wide band antenna for gravitational wave detection. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 289:518–525, 1990.
- [19] A. Brillet et al. VIRGO Proposal to CNRS and INFN. *unpublished*, 1989.
- [20] J.-Y. Vinet. Cavités Fabry Perot. Communication personnelle.
- [21] VIRGO final design, June 1995. version 0.
- [22] F. Bondu. Virgo: fonction de transfert pour une onde d’incidence quelconque en fonction des coordonnées astronomiques. Rapport de stage, janvier 1993.
- [23] R.V. Pound. Electronic frequency stabilization of microwave oscillators. *Review of Scientific Instruments*, 17:490–505, 1946.
- [24] R.W.P. Drever, J.L.Hall, F.V. Kowalsky, J. Hough, G.M. Ford, A.J. Munley, and H. Ward. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Applied Physics B*, 31:97–105, 1983.
- [25] P. Hello. *Modèle physique et simulation de l’antenne interférométrique gravitationnelle Virgo*. PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1990.
- [26] A.S. Nowick and B.S. Berry. *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*. Academic Press, New York, 1972.
- [27] P.R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. *Physical Review D*, 42:2437–2445, 1990.
- [28] F. Marchesoni, G. Cagnoli, and L. Gammaitoni. Damping in low-frequency mechanical pendulum. *Physics Letters A*, 187(5–6):356–364, 1994.

- [29] H.B. Callen and T.A. Welton. Irreversability and generalized noise. *Physical Review*, 83:34–40, 1951.
- [30] H.B. Callen. *Thermodynamics*. John Wiley & Sons, inc. U.S.A. fourth edition, 1963.
- [31] M. Rossi. *Electro-acoustique*. Dunod, 1986.
- [32] F. Reif. *Statistical and thermal physics*. Mc Graw Hill, 1985.
- [33] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité*, volume 7. Ed. Mir, 1990.
- [34] T.J. Quinn, C.C. Speake, R.S. Davis, and W. Tew. Stress-dependent damping in Cu-Be torsion and flexure suspensions at stresses up to 1.1 GPa. *Physics Letters A*, 197(3):197–208, 1995.
- [35] C. Zener. General theory of thermoelastic internal friction. *Physical Review*, 53:90–99, 1938.
- [36] C. Zener. Experimental demonstration of thermoelastic internal friction. *Physical Review*, 53:100–101, 1938.
- [37] C. Zener. Theory of internal friction in reeds. *Physical Review*, 52:230–235, 1937.
- [38] N.M. Rosenberg. *The Solid State*. Oxford Science publications, 1988.
- [39] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 6th edition, 1986.
- [40] L.K. Zarembo and V.A. Krasil'nikov. Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids. *Soviet Physics Uspekhi*, 13(6):778–797, 1971.
- [41] V.B. Braginski, V.P. Mitrofanov, and V.I. Panov. *Systems with small dissipation*. The University Chicago Press, 1985.
- [42] A. Granato and K. Lüke. Theory of mechanical damping due to dislocations. *Journal of Applied Physics*, 27:583–593, 1956.
- [43] J.E. Shigley and C.R. Mischke. *Mechanical Engineering design*. Mc Graw Hill, 1989.
- [44] N. Mio. Mechanical transfer function of a pendulum suspended with a finite-mass wire. *Japanese Journal of Applied Physics*, 31:1243–1244, 1992.
- [45] P. Morse and K. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Mc Graw Hill, 1968.
- [46] G.I. Gonzalez and P.R. Saulson. Brownian motion of a mass suspended by an anelastic wire. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96(1):207–212, 1994.
- [47] T.J. Quinn, C.C. Speake, and L.M. Brown. Materials problems in the construction of long-period pendulums. *Philosophical Magazine A*, 65:261–276, 1991.

- [48] P.R. Saulson, R.T. Stebbins, F.D. Dumont, and S.E. Mock. The inverted pendulum as a probe of anelasticity. *Review of Scientific Instruments*, 65(1):182–191, 1994.
- [49] M. Pham-Tu. Mesures de coefficients de qualité de résonances de miroirs et de fils de suspension. Technical report, LAL Orsay, 1993. Rapport interne VIRGO Orsay.
- [50] Goodfellow. *Métaux alliages composés céramiques polymères composites - Catalogue 1995/96*. Goodfellow, 1995.
- [51] J.R. Hutchinson. Vibrations of solid cylinders. *Journal of Applied Mechanics*, 47:901–907, 1980.
- [52] A.E.M. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, pages 287–291. Dover, New-York, 1944.
- [53] G.W. Mac-Mahon. Experimental study of solid, isotropic elastic cylinders. *Journal of the Acoustical Society of America*, 36:85–92, 1964.
- [54] J.R. Hutchinson. Vibrations of solid cylinders revisited. private communication, 1992.
- [55] F. Bondu. Strain and stress tensors, energy in the Hutchinson method. Technical report, LAL Orsay, 1994. Rapport interne VIRGO Orsay.
- [56] F. Bondu. A program to compute resonant frequencies, surfaces deformations, energy, parameters for mirror thermal noise. Technical report, LAL Orsay, 1994. Rapport interne VIRGO Orsay.
- [57] M. Barsuglia. Mesures des fréquences de résonance et du coefficient de surtension d'un bloc de silice. Technical report, LAL Orsay, 1992. Rapport interne VIRGO Orsay.
- [58] D. Ivanov. An optical method for measuring Virgo mirror resonance frequencies and Q-factor. Technical report, LAL Orsay, 1990. Rapport interne VIRGO Orsay.
- [59] M. Dialinas. Fréquences de résonances de miroirs cylindriques par éléments finis avec SYSTUS. Technical report, LAL Orsay, 1994. Rapport interne VIRGO Orsay.
- [60] F. Bondu and J.Y. Vinet. Mirror thermal noise in interferometric gravitational-wave detectors. *Physics Letters A*, 198:74–78, 1995.
- [61] F. Gillespie and F. Raab. Thermally excited vibrations of the mirrors of the laser interferometer gravitational-wave detector. *Physical Review D*, 52(2):577–585, 1995.
- [62] P. Hello and J.-Y. Vinet. Simulation of thermal effects in interferometric gravitational-wave detectors. *Physics Letters A*, 178:351–356, 1993.
- [63] L. Ju, M. Notcutt, D. Blair, F. Bondu, and C.N. Zhao. Sapphire beamsplitters and test masses for advanced laser interferometer gravitational wave detectors. preprint, 1995.

- [64] B.S. Sathyaprakash. Sensibilité et rapports signal à bruit, 1995. Communication personnelle.
- [65] C. Boccara and V. Lorient. Communication privée, 1995.
- [66] B.E.A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of photonics*. Wiley-Interscience, 1991.
- [67] P. Fritschel. Notes on the laser frequency stabilization. Virgo note PJT 93009, 1993.
- [68] C.N. Man and A. Brillet. Update on the requirements of the laser frequency prestabilization. Virgo note PJT 94036, 1994.
- [69] F. Bondu, A. Brillet, J.P. Coulon, and C.N. Man. Laser frequency prestabilization. Virgo note NTS 95025, 1995.
- [70] F. Bondu, A. Brillet, P. Fritschel, F. Perrone, F. Cleva, L. Latrach, and C.N. Man. An ultrastable high power Nd:YAG laser for the detection of gravitational waves. 9th European Frequency and Time Forum, 1995.
- [71] F. Bondu, P. Fritschel, C.N. Man, and A. Brillet. An ultrahigh spectral purity laser for the VIRGO experiment. *Optics Letters*, 1995. submitted.
- [72] M. Dialinas. Fréquences de résonance de la cavité de préstabilisation déterminées avec SYSTUS. Communication privée, 1992.
- [73] Corning. ULE material properties. Documentation technique.
- [74] Lightwave electronics. Documentation technique.
- [75] D.W. Allan. Statistics of atomic frequency standards. *Proc. IEEE*, 54:221–230, 1966.
- [76] F.L. Walls and David W. Allan. Measurements of frequency stability. *IEEE Proceedings*, 74(1):162–167, 1986.
- [77] F. Hartmann and F. Stoeckel. Stabilité de fréquence et pureté spectrale des lasers. *Journal de Physique*, 39:C1–32, 1978.
- [78] M.E. Costa, J.W. He, A.S. Mann, A.N. Luiten, and D.G. Blair. Combined sapphire oscillator-hydrogen maser frequency standard. *Electronics letters*, 30(25):2119–2120, 1994.
- [79] Z.C. Zhai, H.X. Huang, J.W. We, C.F. Lin, G.X. Jiang, W.H. Luo, and J.F. Lu. The development progresses of hydrogen maser at Shanghai Observatory. *proc. 6th European Frequency and Time Forum*, pages 405–408, 1992. ESA SP-340.
- [80] K. Nakagawa, A.S. Shelkownikov, T. Katsuda, and M. Ohtsu. Absolute frequency stability of a diode-laser-pumped Nd:YAG laser stabilized to a high-finesse optical cavity. *Applied Optics*, 33(27):6383–9386, 1994.

- [81] B. Schutz. Gravitational radiation: an observational perspective, October 1995. Ecole d'été Les Houches, Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel.

Glossaire des principaux symboles utilisés

Les principaux symboles utilisés sont décrits ci-dessous. On se reportera à la partie correspondante pour une définition exacte des termes.

Cavités

ψ_{in} champ incident

ψ_r champ réfléchi

ψ_t champ transmis

ψ_1 champ stocké

P_{in} puissance incidente

P_{ref} puissance réfléchie

P_t puissance transmise

P_{sto} puissance stockée

P_{out} puissance sur la photodiode de détection

P_{DC} puissance continue sur la photodiode de détection

	miroir d'entrée	miroir d'extrémité
réflectivité	r_1	r_2
transmission	t_1	t_2
pertes	$p_1 = 1 - r_1^2 - t_1^2$	$p_2 = 1 - r_2^2 - t_2^2$

c	vitesse de la lumière
L_c	longueur de la cavité
λ	longueur d'onde du faisceau incident
$\nu_{\text{opt}} = c/\lambda$	fréquence optique
$\text{ISL} = c/(2L_c)$	intervalle spectral libre
$\alpha = 4\pi\nu_{\text{opt}}L_c/c$	déphasage d'une onde sur un parcours aller-retour
α_0	déphasage à résonance
$\mathcal{F} = \pi\sqrt{r_1r_2}/(1-r_1r_2)$	finesse
$n = 1/(1-r_1r_2) \simeq \mathcal{F}/\pi$ si $\mathcal{F} \gg 1$	nombre effectif d'aller retour dans la cavité
$p_c = 1 - r_2^2(1-p_1)$	pertes de la cavité
$\zeta = np_c - 1$	couplage de la cavité
$\zeta < 0$	cavité sous-couplée
$\zeta = 0$	cavité couplée optimalement
$\zeta > 0$	cavité sur-couplée
$G = n(1 - \zeta) = P_{\text{sto}}/P_{\text{in}}$	gain de la cavité

Cavité en réflexion

$R = \psi_r/\psi_{in}$	réflectivité (complexe) de la cavité
$C = (1 - \zeta^2)/(1 + \zeta^2)$	contraste
$f_P = \text{ISL}/(2\mathcal{F})$	pôle de la cavité

Détection

m	indice de modulation
η	efficacité quantique du détecteur
P_{DC}	puissance continue incidente sur la photodiode
$\gamma = e\eta/(h_p\nu_{\text{opt}})$	conversion courant/puissance incidente du photodétecteur (h_p constante de Planck et e charge de l'électron)

Bruit thermique

Calcul par le théorème fluctuation-dissipation

k_B	constante de Boltzmann
T	température absolue
$Z(\omega)$	impédance mécanique
f	fréquence d'analyse
$\omega = 2\pi f$	pulsation

Résonateurs

\tilde{x}	bruit de position (en $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$)
M	masse
ω_0	fréquence de résonance
$k = M\omega_0^2$	constante de raideur
f_d	coefficient de frottement
$\phi(\omega)$	angle de pertes
$Q = \phi^{-1}(\omega_0)$	coefficient de qualité
τ	temps de relaxation
ν_0	fréquence de Debye (pertes thermoélastiques)
ϕ_0	angle de pertes maximum par thermoélasticité

Bruit des miroirs

D	diamètre
R	rayon
H	épaisseur
$\text{mode}_i = n, m, \xi$	description d'un mode de résonance
n	ordre circonférentiel (nombre de diamètres nodaux)
ξ	numéro de parité
m	numéro d'ordre
u_z	déplacement d'un point de la surface
P	densité d'intensité lumineuse sur la surface

Bruit des suspensions

ω_n	fréquences de résonance des modes violon
ω_p	fréquence de résonance du mode pendule
ϕ_w	pertes internes au matériau
ϕ_p	angle de pertes du mode pendule
ϕ_v	angle de pertes des modes violon
$K = \frac{\phi_p(\omega)}{\phi_w(\omega)}$	renforcement de l'angle de pertes

Métrologie des fréquences

$\tilde{\nu}$	bruit de fréquence (en $\text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$)
σ_y	écart type d'Allan (racine carrée de la variance d'Allan)

Ondes gravitationnelles

$h(t)$ onde gravitationnelle

\tilde{h}_n seuil de sensibilité (en $1/\sqrt{\text{Hz}}$)

Index

- C , voir contraste
- G_{rec} , voir gain de recyclage
- Q , voir facteur de qualité
- $S_n(f)$, voir densité spectrale de bruit
- $Z(\omega)$, voir impédance mécanique
- β , voir asymétrie
- η , voir efficacité quantique
- γ , voir conversion courant/puissance
- \mathcal{F} , voir finesse
- ISL, voir intervalle spectral libre
- $\phi(\omega)$, voir angle de pertes
- ϕ_p , voir angle de pertes, mouvement pendulaire
- ϕ_v , voir angle de pertes, modes violon
- ϕ_w , voir angle de pertes, internes
- ρ , voir signal à bruit
- τ , voir temps de relaxation
- \tilde{h}_n , voir seuil de sensibilité
- ζ , voir couplage
- h_+ , 5
- h_\times , 5
- w , voir taille de faisceau
- équation d'Einstein, 4
- anélasticité, 54
- angle de pertes, 48
 - internes, 70, 105, 110
 - modes violon, 71
 - mouvement pendulaire, 70
- asymétrie, 33, 37
- cavité
 - contraste, 22
 - couplage, 20, 23
 - Fabry Perot, 19, 24
 - finesse, 21, 23
 - gain de puissance, 23
 - intervalle spectral libre, 21, 23
 - pôle, 22
 - puissance stockée, 23
 - temps de stockage, 21
- coalescence de binaires, 8
- coefficient de qualité, voir facteur de qualité
- coefficient de surtension mécanique, voir facteur de qualité
- coefficients de Lamé, 53
- col de faisceau, voir taille de faisceau laser
- compliance, 56
- conversion courant/puissance de photodiode, 133
- densité spectrale de bruit, 39
- efficacité quantique, 27
- facteur de qualité, 47
- facteur de renforcement, 79
- filtre adapté, 41
- gain de recyclage, 36
- impédance caractéristique, 75
- impédance mécanique, 47
- métrique, 3
- masse caractéristique \mathcal{M} , 8
- mode cleaner, 39
- pic de Debye, 56
- Pound Drever, 27
- pulsars, 9
- quadrupôle, 6, 12

réflectivité

 cavité, 21

 miroir, 19

raideur, 17

seuil de sensibilité, 30

signal à bruit, 29, 41

supernovæ, 7

taille de faisceau laser, 23

temps de relaxation, 47

thermoélasticité, 56

Résumé

La sensibilité d'un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles comme Virgo est cruciale pour l'analyse des sources astrophysiques. Une telle antenne détecte l'onde gravitationnelle comme une variation de phase de faisceau lumineux. La précision de la mesure peut être limitée par le bruit de longueur des cavités, dû aux vibrations thermiques, et par le bruit de fréquence du laser incident.

Ma contribution à l'évaluation du bruit des modes de vibration interne des substrats des miroirs a été d'écrire un programme, basé sur la propagation des ondes acoustiques dans les solides. Il permet les calculs des fréquences de résonance, des masses équivalentes des modes, de la déformation de la surface et son couplage avec un faisceau lumineux incident. Les résultats permettent le dimensionnement des substrats. La sensibilité est alors légèrement moins bonne que celle fournie par une estimation grossière, si les pertes des ondes acoustiques sont constantes en fonction de la fréquence et égales à celles mesurées à résonance. Elle peut être améliorée par diminution des pertes ou par le choix d'un matériau ayant de meilleures performances. Nous avons également mené des expériences pour aider au choix du matériau des fils de suspension. Je propose une expérience de mesure directe du bruit thermique qui permettrait de vérifier la sensibilité.

La configuration de l'interféromètre rend le bruit de fréquence du laser négligeable si le laser est asservi en fréquence. La stabilisation de fréquence se fera en deux étages, l'un qui asservit la fréquence sur la longueur d'une cavité courte, le deuxième qui asservit sur les grands bras de l'interféromètre. Le premier étage a été construit. J'ai vérifié que ses performances remplissent les spécifications. La stabilité de fréquence obtenue se révèle être exceptionnelle.

Mots clés :

VIRGO

Ondes de gravitation

Bruit thermique

Stabilisation de fréquence

Vibration de cylindres

Dissipation du son dans les solides